

Gedanken zum Theorem von Bernoulli *

Von Dr. *Corrado Gini*

Professor an der Universität Rom

Ich möchte hier von *Jakob Bernoulli* reden (1654—1705), dem ersten und berühmtesten der eminenten Mathematiker, die den Ruhm der Familie bilden¹. Sein grundlegendes Werk — von dem viele sprechen, das aber nur wenige gelesen haben — ist die *Ars Conjectandi*, postum im Jahre 1713 von seinem Neffen *Nikolaus* veröffentlicht². Es ist jedoch angezeigt, dessen Lektüre durch die der Briefe zu ergänzen, welche der Verfasser in den letzten Jahren seines Lebens mit *Leibniz* gewechselt hat³.

Das Studium der Klassiker ist nicht so sehr der Gelehrsamkeit wegen nützlich, als aus folgendem Grund: indem es uns zu den Ursprüngen einer Doktrin zurückführt, erlaubt es uns oftmals, die von den späteren Autoren eingenommenen Standpunkte — seien sie begründet oder unbegründet — zu erklären, und zwar manchmal besser, als es diese Autoren selber tun. Dies ist auch bei der Lektüre der Schriften *Jakob Bernoullis* der Fall.

Die *Ars Conjectandi* besteht aus vier Teilen.

Der erste Teil enthält die Wiedergabe des Traktates von *Christian Huygens*, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, versehen mit einem Kommentar von *Bernoulli*. Die Abhandlung von *Huygens* enthält die Lösungen von 14 Problemen, die sich auf Glücksspiele beziehen. Zu einigen derselben liefert *Bernoulli* neue Beweise, andere Probleme führt er weiter, und neue Probleme stellt und löst er.

* Die Übertragung aus dem Italienischen haben Dr. *Ilse Schneiderfranken* und *Ernesto Billeter* besorgt. Die angeführten Stellen aus dem Briefwechsel von *Leibniz* und *Bernoulli* wurden aus dem Lateinischen übertragen von Dr. *E. Schubarth*.

¹ Die Namen der wichtigsten Mathematiker *Bernoulli*, nach dem genannten *Jakob*, sind: *Johann* (1667—1748), Bruder des *Jakob*; *Nikolaus* (1687—1759), Sohn eines anderen Bruders *Jakobs*, der nach dem Tode *Jakobs* dessen Werk veröffentlicht hat; die Söhne des genannten *Johann* sind: *Nikolaus* (1695—1726), *Daniel* (1700—1782) und *Johann* (1710—1790); endlich die Söhne dieses letzteren: *Johann* (1744—1807) und *Jakob* (1759—1789).

² Der vollständige Titel lautet: *Jacobi Bernoulli, Profess. Basil. et utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. Pruss. Sodal. Mathematici Celeberrimi, Ars Conjectandi, Opus Posthumum, Accedit Tractatus De Seriebus Infinitis, et Epistola Gallice Scripta De Ludo Pilae, Reticularis.* — Basileae, Impensis Thurnisiorum, Fratrum. MDCCXIII.

³ *Leibnizens mathematische Schriften*, hg. von *C. I. Gerhardt*. Erste Abt., Bd. III: Briefwechsel zwischen *Leibniz*, *Jacob Bernoulli*, *Johann Bernoulli* und *Nicolaus Bernoulli*. (Leibnizens gesammelte Werke aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover, hg. von *Georg Heinrich Pertz*. 3. Folge: *Mathematik*, Bd. 3). Halle 1855.

Der zweite Teil enthält die Lehre von den Permutationen und Kombinationen, welche bereits einige eminente Mathematiker zu behandeln begonnen hatten — der Autor nennt *Schooten, Leibniz, Wallis* und *Prestet* — und zu der *Bernoulli* einen wichtigen Beitrag leistet.

Im dritten Teil untersucht *Bernoulli* 24 Probleme — alle die Glücksspiele betreffend —, die dazu dienen, die Anwendung der Theorie der Permutationen und Kombinationen, die im vorangehenden Teil dargestellt ist, zu erläutern.

Der vierte Teil endlich hätte — wie sein Titel aussagt — die Anwendung der vorangehenden Doktrin auf zivile, moralische und ökonomische Gegenstände bringen sollen. Obwohl er sich als unvollständig erweist — wie wir nachher sehen werden —, ist er zweifellos der wichtigste Teil des Werkes, bildete er doch die Grundlagen für alle späteren Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie für deren Anwendungen in der Statistik.

Dieser Teil zerfällt in fünf Kapitel, deren Überschriften deutlich den Inhalt anzeigen:

- I. *Praeliminaria quaedam de Certitudine, Probabilitate, Necessitate et Contingentia Rerum.*
- II. *De Scientia et Conjectura. De Arte Conjectandi. De Argumentis Conjecturarum. Axiomata quaedam generalia huc pertinentia.*
- III. *De variis argumentorum generibus, et quomodo eorum pondera aestimentur ad supputandas rerum probabilitates.*
- IV. *De duplici Modo investigandi numeros casuum. Quid sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta. Problema singulare eam in rem propositum, etc.*
- V. *Solutio Problematis praecedentis.*

Welches sind nun die Grundgedanken?

Die Wahrscheinlichkeit wird als ein Grad oder Bruchteil der Gewissheit aufgefasst, und die Kunst, sie zu messen, *Ars Conjectandi sive Stochastice* genannt.

Man leitet die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus Zahl und Gewicht (d. h. der Beweiskraft) der Argumente her, die das Eintreten dieses Ereignisses erweisen. Das Gewicht der Argumente — und somit die Wahrscheinlichkeit, die daraus folgt — leitet sich seinerseits aus dem Verhältnis der Anzahl der dem Ereignis günstigen Fälle und sämtlicher günstiger und ungünstiger Fälle ab, wobei alle Fälle als gleichmöglich betrachtet werden; wenn sie das nicht sind, können sie auf solche reduziert werden, indem jener Fall, dem eine grössere Möglichkeit des Eintreffens zukommt, mit einer dieser Möglichkeiten proportionalen Zahl multipliziert wird. Man geht, mit anderen Worten, — worauf *Bernoulli* ausdrücklich hinweist — wie bei den Glücksspielen vor, die im vorangehenden Teil der Abhandlung betrachtet worden sind.

Nur ist es in der Praxis fast nie möglich, in dieser Weise vorzugehen, angenommen bei solchen Spielen, welche in der Weise angeordnet sind, dass die Zahl der günstigen und ungünstigen Fälle leicht ermittelt werden kann. Was aber *a priori* zu bestimmen nicht möglich ist, wird manchmal *a posteriori* möglich, d. h. aus dem, was sich aus der Beobachtung einer Vielzahl von ähnlichen Fällen ergibt. Dieses empirische Vorgehen ist nicht neu, und es ist jedem

klar, dass hierzu sehr viele Beobachtungen nötig sind und dass, je zahlreicher diese sind, desto geringer die Gefahr ist, sich von der wahren Verhältniszahl zu entfernen. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob mit wachsender Zahl der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, die wahre Verhältniszahl zu erreichen, kontinuierlich wächst und somit immer weniger von der Gewissheit abweicht, oder ob dieser Zunahme eine Grenze gesetzt ist, die nicht überschritten werden kann.

Bernoulli behauptet nun, dass eine solche Grenze nicht besteht: wenn sich z. B. in einer Urne 3000 weiße und 2000 schwarze Kugeln befinden, so kann jemand, der das nicht weiss, die Ziehungen so lange fortsetzen, bis die Wahrscheinlichkeit, dass das wahre Verhältnis der weissen zu den schwarzen Kugeln innerhalb und nicht ausserhalb bestimmter Grenzen fällt — z. B. innerhalb 301 : 200 und 299 : 200 oder innerhalb 3001 : 2000 und 2999 : 2000 —, jedwede im voraus angenommene Wahrscheinlichkeit übertrifft. Dies ist das Problem — erklärt *Bernoulli* —, das ich mir vorgenommen habe der Öffentlichkeit zur Kenntnis zu bringen, nachdem ich während 20 Jahren daran gearbeitet habe, ein Problem, dessen Neuigkeit und Nützlichkeit seiner Schwierigkeit gleichkommen, die aber das Gewicht und den Wert der vorangehenden Kapitel des Traktates erhöhen.

Das fünfte Kapitel, das letzte der Abhandlung, nennt sich *Solutio Problematis praecedentis*. Hier wird, nach einigen Lemmatas, der Beweis jenes Satzes erbracht, der unter dem Namen «Theorem von *Bernoulli*» in die Doktringeschichte eingegangen ist.

Hat *Bernoulli* seine Behauptung bewiesen?

Keynes verneint es. Gestützt auf den Briefwechsel zwischen *Leibniz* und *Bernoulli* behauptet er, dass *Bernoulli* tatsächlich die Absicht hatte, zu beweisen, wie die Wahrscheinlichkeit *a posteriori* bestimmt werden könne, durch eine Inversion des nach ihm benannten und in der *Ars Conjectandi* bewiesenen Lehrsatzes. Auf dieses inverse Theorem habe *Bernoulli* in seinen Briefen an *Leibniz* angespielt, aber er habe es nicht weiter verfolgt, sei es, dass ihn die Einwände von *Leibniz* beeindruckt haben, sei es, weil er durch den Tod daran gehindert wurde, und das Werk sei somit unvollendet geblieben¹.

Dass die *Ars Conjectandi* — die ja, wie gesagt, vom Neffen *Nikolaus* postum veröffentlicht wurde — unvollendet blieb, ist unbestritten. *Nikolaus* selbst sagt es ausdrücklich im Vorwort.

IVtam Partem qua usum et applicationem praecedentium ad res civiles, morales et oeconomicas ostendere voluit, adversa diu usu valetudine tandemque ipsa morte praeventus imperfectam reliquit.

Diese Erklärung lässt erkennen, was tatsächlich noch fehlte: es fehlten die Anwendungen auf die zivilen, moralischen und ökonomischen Gegenstände.

Was das gestellte Problem betrifft, so ist auf Grund des Textes der *Ars Conjectandi* selber nicht daran zu zweifeln, dass *Bernoulli* der Meinung war, es durch das Theorem gelöst zu haben, das seinen Namen erhalten hat. Und

¹ *J. M. Keynes, A Treatise on Probability. London 1921. S. 368/369.*

wirklich: im vierten Kapitel sagt er, dass er an diesem Problem 20 Jahre lang gearbeitet habe, und fügt hinzu, er wolle sich, bevor er die Lösung mitteile, mit einigen Einwänden beschäftigen; es sind die gleichen, die *Leibniz* vorgebracht hatte und auf die wir später zurückkommen werden. Und das fünfte Kapitel, das den Beweis des nach *Bernoulli* genannten Theorems enthält, ist ja betitelt: *Lösung des vorhergehenden Problems.*

Diese Schlussfolgerung wird andererseits durch die aufmerksame Lektüre der zwischen *Leibniz* und *Bernoulli* gewechselten Briefe bestätigt, auf die einzutreten der Mühe wert ist.

Leibniz ist es, der *Bernoulli* den Anstoss gibt, ihm von seinen Arbeiten über die Wahrscheinlichkeit zu schreiben.

«Ich höre,» so schreibt er im April 1703, «dass Du die Lehre von der Abschätzung der Wahrscheinlichkeiten (auf die ich grosse Stücke gebe) stark gefördert hast. Ich wünschte, dass jemand die verschiedenen Arten von Glücksspielen (bei denen es schöne Beispiele gibt für diese Theorie) mathematisch bearbeitete. Das wäre zugleich anziehend und nützlich und nicht unwürdig Deiner oder eines anderen grossen Mathematikers» (S. 71).

Dies war für *Bernoulli* wie eine Einladung zur Hochzeit. Er antwortet ausführlich am 3. Oktober des gleichen Jahres.

«Ich möchte gerne wissen, grosser Meister, von wem Du erfahren hast, dass ich mich mit der Lehre von der Abschätzung der Wahrscheinlichkeiten beschäftigt habe. Tatsächlich habe ich mich seit vielen Jahren mit Betrachtungen dieser Art abgegeben, und ich glaube kaum, dass jemand mehr über diese Dinge nachgedacht hat. Ich hatte auch die Absicht, einen Traktat darüber zu schreiben. Aber oft habe ich sie ganze Jahre hindurch beiseite gelegt, weil meine angeborene Trägheit, die eine zusätzliche Schwäche meiner Gesundheit ungeheuer stark vermehrt hat, es mit sich bringt, dass ich äusserst widerwillig an das Schreiben herangehe, und oft wünschte ich mir einen Schreiber, der meine leicht angedeuteten Gedanken voll erraten und schriftlich niederlegen könnte. Trotzdem habe ich schon den grössten Teil des Buches fertig gemacht, aber es fehlt noch das Wichtigste, in dem ich die Prinzipien der Vermutungskunst auf gesellschaftliche und wirtschaftliche Fragen anwenden lehre, nachdem zu diesem Zweck ein eigenartiges Problem gelöst wäre, das sich durch eine nicht geringe Schwierigkeit und eine enorme Nützlichkeit auszeichnet. Darüber war schon vor mehr als 12 Jahren mein Bruder unterrichtet — wenn er es auch, vom Marquis de l'Hôpital danach gefragt, verheimlicht haben wird in der Absicht, meine Verdienste herabzusetzen. Ich erkläre Dir kurz, um was es sich handelt: Es ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit irgendeines Ereignisses abhängt von der Anzahl der Fälle, in denen es eintreten oder nicht eintreten kann. So gibt es einen Grund, warum wir z. B. wissen, wie viel wahrscheinlicher es ist, dass bei zwei Würfeln 7 als dass 8 Punkte fallen: wir wissen aber nicht, wie viel wahrscheinlicher es ist, dass ein junger Mann von 20 Jahren einen 60jährigen überleben wird, als umgekehrt. Das ist das einzige, dass uns die Anzahl der Fälle bekannt ist, in denen 7 und in denen 8 Punkte auf den Würfeln erscheinen können: unbekannt ist aber die Anzahl der Fälle, in denen der junge Mann vor dem ältern stirbt und umgekehrt. Daher habe ich begonnen, darüber nachzudenken, ob nicht vielleicht, was uns a priori verborgen ist, schliesslich uns bekanntwerden könne a posteriori, aus der Beobachtung des Ergebnisses in vielen ähnlichen Beispielen; hier zum Beispiel, wenn man den Versuch in sehr vielen Fällen bei Alten und Jungen gemacht hat. Denn wenn ich fände, es sei tausendmal z. B. eingetroffen, dass der junge Mann den betreffenden alten überlebt habe, und nur fünfhundertmal sei das Gegenteil geschehen, so könnte ich mit ziemlicher Gewissheit folgern, es sei doppelt so wahrscheinlich, dass der Junge den Alten überlebe, als umgekehrt.

Obwohl aber — was verwunderlich ist — auch der Dümme durch irgendeinen natürlichen Instinkt von sich aus und ohne vorherige Belehrung weiss, dass je mehr Beobachtungen gemacht werden, desto weniger Gefahr besteht, vom Ziele abzukommen, so braucht es doch eine un-

gewöhnliche Anstrengung, um diesen Sachverhalt genau und mit den Mitteln der Mathematik zu beweisen. Aber auch das ist nicht alles, was ich will: darüber hinaus erhebt sich die Frage, ob mit wachsender Zahl der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit in der Weise ständig wächst, dass schliesslich, wenn eine beliebige Wahrscheinlichkeit vorgegeben ist, es wahrscheinlicher zustande kommt, dass ich das wahre Verhältnis zwischen den Anzahlen der Fälle, als dass ich ein anderes, vom wahren verschiedenes Verhältnis gefunden habe; ob tatsächlich das Problem, dass ich so sagen soll, seine Asymptote habe, das heisst, ob ich schliesslich zu einem solchen Grad der Wahrscheinlichkeit gelange, über den hinaus es nicht wahrscheinlicher geschehen kann, dass ich das wahre Verhältnis entdeckt habe. Denn wenn es so ist, so wird es zustande gekommen sein durch unser Bemühen, die Anzahl der Fälle durch Versuche zu ermitteln; wenn aber das geleistet ist, so werden wir das Verhältnis der Anzahlen ebenso gewiss a posteriori ermitteln, wie wenn es uns a priori bekannt gewesen wäre. Und ich habe herausgefunden, dass die Sache sich gewiss so verhält; daher kann ich bereits bestimmen, wieviele Beobachtungen anzustellen sind, damit es hundert, tausend, zehntausend usw. mal wahrscheinlicher ist (und schliesslich so gut wie gewiss), dass das Verhältnis zwischen den Anzahlen der Fälle, das ich auf diese Weise erhalte, gesetzmässig und echt ist; das genügt beim Gebrauch im bürgerlichen Leben, um unsere Vermutungen in irgendeiner entsprechenden Angelegenheit nicht weniger wissenschaftlich anzustellen wie beim Würfelspiel; und ich glaube, dass darin allein die ganze Klugheit des Staatsmannes besteht. Ich weiss nicht, grosser Meister, ob es Dir scheint, dass in diesen Betrachtungen etwas von Zuverlässigkeit darin steckt; wenn ja, so wirst Du mir einen Gefallen tun, wenn Du mir einige juristische Fälle unterbreitest, in denen sie Deiner Ansicht nach mit Erfolg angewendet werden können. Vor kurzem habe ich in den in Hannover gedruckten *Menstrua Excerpta* einen mir unbekanntem Traktat des Pensionarius de Witt erwähnt gefunden: von Subtiler Ausrechnung des *valoris* der Leib-Renten. Vielleicht enthält er etwas, was sich darauf bezieht; wenn dem so ist, so wünschte ich dringend, davon ein Exemplar auf irgendeinem Weg zu erhalten» (S. 77/78).

Am 3. Dezember antwortet *Leibniz* übervorsichtig und skeptisch.

«Äusserst nützlich ist die Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten, wiewohl in Beispielen aus dem Rechts- und Staatswesen meist nicht so sehr eine subtile Rechnungsart nötig ist als eine genaue Aufzählung aller Umstände. . . Wenn wir empirisch die Wahrscheinlichkeiten abschätzen, indem wir den Fortgang der Ereignisse untersuchen, so ist Deine Frage, ob sich auf diesem Wege schliesslich Gewissheit erreichen lässt. Und Du schreibst, dass Du zu diesem Ergebnis gekommen bist. Darin scheint mir aber eine Schwierigkeit zu liegen, dass das Contingente, oder was von unendlich vielen Umständen abhängt, nicht durch endlich viele Versuche bestimmt werden kann; die Natur hat zwar ihre Gewohnheiten, die aus der Wiederkehr der Ursachen stammen, aber nur *ὡς ἐπι τὸ πολὺ*. . . Wenn man aber auch auf empirischem Wege keine Gewissheit erhalten könnte, so wäre nichtsdestoweniger die empirische Abschätzung in praxi nützlich und genügend. Das Büchlein des Pensionarius de Witt ist unbedeutend, er verwendet darin jene bekannte Abschätzung von der gleichen Möglichkeit gleicher Fälle und zeigt damit, dass die Holländer ausreichende lebenslängliche Renten für ein Kapital zahlen.» (S. 83/84.)

Bernoulli erwidert, etwas gekränkt, am 24. April 1704.

«Was die Lehre von der Abschätzung der Wahrscheinlichkeit im Gebiet der Volkswirtschaft nötig hat nicht nur an Aufzählung der Umstände, sondern von jenem gleichen theoretischen Verfahren und Kalkül, wie wir sie sonst bei der Berechnung der Chancen im Würfelspiel anzuwenden pflegen, das lehren mich die verschiedenen Fragen aus dem Gebiet der Versicherungen, der Renten auf Lebenszeit, der Aussteuerverträge, der Voranschläge (*praesumptiones*) unter anderen; wie ich zu seiner Zeit klar nachweisen werde. Dein Einwand aber gegen mein empirisches Verfahren, das Verhältnis zwischen den Anzahlen der Fälle zu bestimmen, betrifft die Beispiele, in denen man über diese Zahlen nicht sonstwie zur Übereinstimmung kommen kann, nicht stärker als jene anderen, in denen sie sogar a priori ermittelt werden können. Ich habe aber gesagt, in diesen könne ich den Beweis erbringen; und mein Bruder hat den Beweis schon vor zwölf Jahren gesehen und anerkannt. Damit Du aber deutlicher verstehen mögest, was ich will, gebe ich Dir ein Beispiel: Angenommen, in eine Urne habe man eine Anzahl Steine

hineingetan, weisse und schwarze, und die Anzahl der weissen sei doppelt so gross wie die Anzahl der schwarzen, Du aber kenntest dieses Verhältnis nicht und wollest es durch Versuche bestimmen. Du nimmst also einen Stein nach dem anderen heraus (wobei Du jedesmal den Stein, den Du herausgezogen hast, wieder zurücklegst, ehe Du den folgenden herausliest, damit die Anzahl der Steine in der Urne sich nicht verringert) und Du beobachtest, ob der, den Du herausgezogen hast, weiss oder schwarz sei. Ich behaupte nun: nachdem man zwei Verhältnisse angenommen hat, die dem Verhältnis 2 beliebig nahe sind, das eine grösser, das andere kleiner, etwa 201:100 und 199:100, so bestimme ich theoretisch die Anzahl der Beobachtungen, bei der, wenn Du sie machst, es zehner- oder hundert- oder tausendmal usw. wahrscheinlicher Dir begegnen wird, dass das Verhältnis der Anzahl der Fälle, in denen Du einen weissen Stein herausziehst, zur Anzahl der Fälle, in denen Du einen schwarzen herausziehst, innerhalb als dass es ausserhalb dieser Grenzen für das Verhältnis 2, nämlich 201:100 und 199:100, fallen wird; so sehr, dass Du schliesslich unbedenklich gewiss sein kannst, das experimentell bestimmte Verhältnis sei dem wahren Verhältnis 2 beliebig nahe gekommen. Wenn Du nun an Stelle der Urne den menschlichen Körper eines alten Mannes oder eines Jünglings einsetzest, der den Zunder der Krankheiten in sich birgt wie die Urne die Steine, so wirst Du auf die gleiche Art durch Beobachtungen bestimmen können, um wieviel näher jener dem Tode sei als dieser. Und es nützt nichts, zu sagen, die Zahl der Krankheiten, denen beide ausgesetzt sind, sei unendlich; denn das ist im Grunde so; dennoch ist bekannt, dass auch im Unendlichen Grade angegeben werden können, und dass das Verhältnis einer unendlichen Grösse zu einer anderen sogar in endlichen Zahlen, entweder genau oder so genau, wie es für die Praxis genügt, sich ausdrücken lässt. Sollten sich die Krankheiten im Laufe der Zeit vervielfachen, dann müssten unbedingt neue Beobachtungen angestellt werden: und gewiss würde, wer aus den täglichen gewohnten Beobachtungen in London, Paris oder sonstwo über die Lebensdauer der antediluvianischen Ahnen ein Urteil abgeben wollte, von der Wahrheit enorm abirren... Ich entnehme Deiner Beschreibung, dass die belgische Abhandlung des Johannes de Witt Dinge enthält, die meinem Zweck besonders dienen. Ich bitte Dich deshalb, mir Dein Exemplar des Buches sobald wie möglich leihweise zu überlassen, da ich es eben in Amsterdam vergeblich aufzutreiben versucht habe.» (S. 87—89.)

In seiner Antwort vom 28. November desselben Jahres erklärt *Leibniz*, dass es ihm nicht gelungen sei, das Werkchen von *De Witt* aufzufinden; er werde aber weiter suchen, obwohl er glaube, dass es nichts enthalte, was *Bernoulli* sehr neu sein könnte.

Was die eigentliche Kontroverse betrifft, bemerkt er:

«In gewissen nicht genügend durchdachten Untersuchungen (wenigstens nach unserm Begriff) ist es nicht sicher, dass wir durch Vermehrung der Daten — zum Beispiel dadurch, dass wir neue Jahre zu den Krankheitsbeobachtungen hinzunehmen — näher an den wahren mittleren Wert in bezug auf das Ganze herankommen, trotzdem die Vernunft erheischt, dass die Sache so zu erreichen ist; dagegen wird er durch Fortschreiten in einer Reihe wie der ludolphischen immer erreicht.» (S. 94.)

In seinem Brief vom 28. Februar 1705 erinnert *Bernoulli Leibniz* wieder daran, ihm die Abhandlung *De Witts* zu schicken, sobald sie ihm in die Hände komme, denn ihr Inhalt, wie er auch sein möge, könne nicht anders als neu für ihn sein (aus dem folgenden Brief vom 22. März — dem letzten, den *Leibniz* an *Bernoulli* geschrieben hat — geht hervor, dass *Leibniz* sie noch nicht gefunden hatte).

Auf den Einwand von *Leibniz* antwortet *Bernoulli* nicht — weil er offenbar seine Tragweite nicht genügend einschätzt —, während er kategorisch seinen Standpunkt bekräftigt.

«*Quod Verisimilitudines spectat, et earum augmentum pro aucto scil. observationum numero, res omnino se habet ut scripsi, et certus sum Tibi placituram demonstrationem, cum publicavero*» (S. 95—97).

Es ist nicht bekannt (oder es ist wenigstens mir nicht bekannt), wie *Leibniz* dann den Beweis und im allgemeinen das ganze Werk *Bernoullis* aufgenommen hat; aber es ist erlaubt, aus seinem Schweigen zu schliessen, dass er es nicht gebührend gewürdigt hat.

In ihren Briefen vom 9. September 1713 kündigten ihm *Jakob Bernoullis* Neffe, *Nikolaus*, der die postume Ausgabe besorgt hatte (S. 989 der oben zitierten Briefe), und der Bruder *Johann*, der mit *Leibniz* einen sehr regen Briefwechsel unterhielt (S. 922), die Übersendung des Werkes an. Als *Nikolaus* am 28. Februar des folgenden Jahres wieder schrieb, präziserte er, dass das Werk an die Frankfurter Messe geschickt würde, sofern nichts Gegenteiliges vereinbart werde (S. 992). *Leibniz* antwortete *Johann* von Wien aus am 31. März und bat, man solle es lieber dem Buchhändler Forster in Hannover oder einem anderen Kaufmann aus Hannover oder Braunschweig schicken (S. 930). *Johann* sandte am 23. Mai *Leibniz* die ihm von Forster überlassene Quittung der Sendung zu, welche die *Ars Conjectandi* und sein *Manuaria nautica* enthielt, die gerade veröffentlicht worden waren (S. 931). Im folgenden Brief, den *Leibniz* am 30. Dezember von Hannover schrieb, lässt er durchblicken, dass er die Sendung erhalten habe, denn über das nautische Handbuch, welches er überflogen hatte, schreibt er in sehr lobenden Worten (S. 933). Die *Ars Conjectandi* aber bleibt unerwähnt, und auch in den folgenden Briefen, die zwischen ihm und *Johann* bis zum Vorabend des Todes von *Leibniz* gewechselt wurden, kommt er nicht mehr darauf zu sprechen. Der letzte Brief, den *Johann Bernoulli* am 11. November 1716 von Basel aus schrieb (S. 972/973), sollte *Leibniz* nicht mehr lebend vorfinden; er war drei Tage nach Absendung des Schreibens in Hannover gestorben.

Die bisherigen Ausführungen zeigen deutlich, dass es sich nicht um einen von *Bernoulli* erst noch zu liefernden Beweis handelte, sondern um einen Beweis, der schon seit langem erbracht war und den sein Bruder *Johann* bereits seit 12 Jahren kannte. Um was *Bernoulli Leibniz* bat, waren lediglich Hinweise auf juristische oder politische Gegenstände für die Anwendungen, Anwendungen, die er noch nicht gemacht hatte und die er auch nicht mehr rechtzeitig machen konnte, so dass er sein Werk unvollendet zurückliess.

Dass jenes schon seit 12 Jahren seinem Bruder bekannte Theorem, auf das *Bernoulli* in seinen Briefen an *Leibniz* anspielt, das gleiche ist, an dem er während 20 Jahren gearbeitet hatte, und dessen sukzessive Darlegung er im Kapitel IV des vierten Teiles der *Ars Conjectandi* ankündigte, um dann die Lösung im Kapitel V zu geben, ist offenkundig und wird bestätigt durch die grundsätzlich analogen Kennzeichnungen durch den Verfasser in der *Ars Conjectandi*. («*Problema singulare*» S. 223, «*cujus tum novitas, tum summa utilitas cum pari coniuncta difficultate*» S. 227) und im Brief an *Leibniz* vom 3. Oktober 1703 («*soluto eum in finem singulari quodam Problemate, quod difficultatis commendationem non parvam utilitatis longe amximam habet*» S. 77). Es scheint, dass

Bernoulli nicht im geringsten von den Einwänden *Leibniz'* beeindruckt gewesen ist. Dies lässt sich nicht nur aus der kategorischen Bestätigung seiner Auffassung und aus dem festen Vertrauen entnehmen, die er im Briefe vom 28. Februar 1705 zum Ausdruck bringt, mit dem übrigens die Diskussion abschloss, sondern auch aus den Erwiderungen, mit denen er — ohne *Leibniz* zu nennen — auf dessen Einwände am Ende des Kapitels IV des vierten Teils der *Ars Conjectandi* eingeht, bevor er zu der Darlegung des Theorems schreitet.

Es sind drei Einwände, auf die er erwidert (S. 227):

1. *Objiciunt primò, aliam esse rationem calculorum, aliam morborum aut mutationum aeris; illorum numerum determinatum esse, horum indeterminatum et vagum;*
2. *Objiciunt secundò, calculorum numerum finitum esse, morborum etc. infinitum;*
3. *Ajunt tertid, numerum morborum non manere constanter eundem, sed quotidie novos pullulare.*

Wir haben bereits die Antworten kennengelernt, die *Bernoulli* in den Briefen an *Leibniz* den beiden letzten Einwänden entgegenhält: er wiederholt sie im wesentlichen in der *Ars Conjectandi*.

Was den ersten betrifft, so glaube ich, dass es nicht zu kühn ist, in ihm den letzten von *Leibniz* in seinem Brief vom 28. November 1704 formulierten Einwand zu sehen, auf den *Bernoulli* keine Antwort gegeben hatte. Die Antwort, die *Bernoulli* jetzt gibt, besagt, dass unsere Erkenntnisse unsicher und unbestimmt sind, sei es beim Beispiel der Kugeln in der Urne (*calculi*), sei es beim Beispiel der Krankheiten oder des Klimas.

Diese Antwort ist — sofern ich den Einwand von *Leibniz* richtig verstehe — nicht überzeugend. Wenn ich mich daran erinnere, was dieser im vorhergehenden Brief über das mögliche Entstehen neuer Todesursachen geschrieben hat, so scheint mir in der Tat, der Einwand von *Leibniz* sei in dem Sinn zu deuten, dass bei einer Änderung der Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses — wie dies bei der Mortalität eben vorkommt — man keineswegs sicher sei, ob mit wachsender Zahl der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler innerhalb bestimmter Grenzen bleibe, stetig wachse. Der Einwand ist in Wirklichkeit nicht stichhaltig, wie sich nachher aus jenem Theorem ergab, das *Poisson* später bewiesen hat. *Bernoulli* jedoch hätte ihm nichts entgegenhalten können, denn sein Lehrsatz setzt voraus, dass dem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zukommt, die für alle Beobachtungen konstant ist.

Ein schwerwiegenderer und grundsätzlicher Einwand, den *Leibniz* nicht gemacht hatte und den *Bernoulli* nicht erwartet hätte, ist der, dass das Zurückgehen von den beobachteten Häufigkeiten auf die unbekannte Wahrscheinlichkeit ein Problem inverser Wahrscheinlichkeit darstellt, während das *Bernoullische* Theorem das Problem direkter Wahrscheinlichkeit löst, indem es aus der *a priori* bekannten Wahrscheinlichkeit, auf die beobachteten Häufigkeiten schliesst.

Das Theorem *Bernoullis* genügte also dem praktischen Problem nicht, das er sich gestellt hatte: nämlich die Wahrscheinlichkeit mit einer beliebig

grossen Annäherung empirisch zu bestimmen — hierin bin ich mit *Keynes* einverstanden — aber — und hierin bin ich anderer Meinung wie *Keynes* — *Bernoulli* glaubte, dass es ihm genüge.

Dieser unerlaubte Übergang von der direkten zur inversen Wahrscheinlichkeit, der gelegentlich in den Arbeiten von *Laplace* und *Poisson* wieder auftaucht und der — wie ich gezeigt habe¹ — den Methoden der Signifikanztests und der Vertrauensintervalle zugrunde liegt, die von der englischen Schule entwickelt worden sind, hat somit seine Wurzel bei *Jakob Bernoulli*: er stellt, so könnten wir sagen, die «Erbsünde der Wahrscheinlichkeitsrechnung» dar. Dies erklärt, warum es so schwer ist, sie auszumerzen!

Die Tragweite dieses logischen Fehlers ist so gross, dass man nie genug davor warnen kann. Er liegt in der Tat nicht nur den genannten Methoden zugrunde, mit denen man vermeint, die Zuverlässigkeit statistischer Daten messen zu können, ohne zu irgendeiner Hypothese zu greifen, sondern er ist — und dies ist nicht minder wichtig — in einem *Raisonnement* verwurzelt, aus dem die zeitgenössische mystische Richtung sich nährt.

Die extreme Unwahrscheinlichkeit, dass sich in einer zufälligen Kombination der natürlichen Elemente die Phänomene manifestieren, die wir in der Natur beobachten, führt in der Tat dazu, es theoretisch als äusserst unwahrscheinlich und praktisch als ausgeschlossen zu betrachten, dass diese sich zufällig einstellen, und verleitet dazu, eine übernatürliche regulierende Macht zu postulieren. So wird beispielsweise darauf hingewiesen, es bestehe eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit, kleiner als 10^{-600} , dass sich in einer zufälligen Kombination aus anorganischen Elementen eines der aus 2000 Atomen bestehenden einfachsten organischen Moleküle bilde, und man folgert daraus, es sei faktisch als gewiss anzusehen, dass ein solches Molekül nicht einer zufälligen Zusammensetzung der anorganischen Elemente entstammen könne. Auf Grund der Lösung eines Problems direkter Wahrscheinlichkeit hält man sich deshalb ungerechtfertigterweise zu einer Schlussfolgerung ermächtigt, welche die Lösung eines Problems inverser Wahrscheinlichkeit voraussetzt, zu der aber die Elemente fehlen.

Der Widersinn, zu dem ein derartiges Vorgehen führen kann, wird an einem anderen Beispiel deutlich werden. Die Wahrscheinlichkeit, eine Quaterne² zu gewinnen, beträgt $1/511038$: wenn man in der oben erwähnten Weise argumentiert, kommt man zur Schlussfolgerung, dass die Wahrscheinlichkeit, der Gewinn einer Quaterne sei zufällig, nur 1 zu 511 038 beträgt, dass hingegen eine Wahrscheinlichkeit von 511 037 zu 511 038 besteht, dass ein solcher Gewinn das Ergebnis irgendwelcher Machenschaften oder eines Betruges ist.

¹ Vgl. insbesondere die Eröffnungsreden der 1. und 7. wissenschaftlichen Sitzung der Italienischen Statistischen Gesellschaft, veröffentlicht in den *Atti* dieser Gesellschaft: *I pericoli della statistica*, Oktober 1939; *I testi di significatività*, Juni 1943.

² Anmerkung der Übersetzer: Dieses Wort bezeichnet in Italien einen hohen Lottogewinn.

Ein bissiger Paduaner Kollege pflegte zu sagen, dass man in Italien nicht Lotto spielen könne, denn wer verliere oder einen unbedeutenden Gewinn erziele, werde in Frieden gelassen, wem aber, zu seinem Unglück, ein hoher Gewinn zufalle, werde ins Gefängnis gesteckt, eben auf Grund des Scheinargumentes, die Wahrscheinlichkeit der gewinnbringenden Kombination sei derart klein, dass ihr Eintreffen nicht zufällig sein könne.

Jeder wird sich gegen dieses Argument sträuben; dennoch ist es vom logischen Standpunkt aus mit jenem Gedankengang identisch, der seit *Bernoulli* auch bei den ernsthaftesten Wahrscheinlichkeitstheoretikern als vollwichtig gilt und der den modernen statistischen Theorien der Signifikanztests und der Vertrauensintervalle zugrunde liegt. Damit identisch ist ferner, gleichfalls vom logischen Standpunkt aus, das Argument, mit dem die modernen mystischen Richtungen ihre antimaterialistische Reaktion begründen zu können glauben. Dieses Beispiel möge genügen, um zu zeigen, wie verschieden das kritische Empfinden des menschlichen Geistes ist, je nachdem, ob es sich um theoretische Spekulationen oder aber um Fragen handelt, welche die eigenen vitalen Interessen unmittelbar berühren.

Bernoullis Auffassung von der Wahrscheinlichkeit ist subjektiv. Er fasst sie — wie ich oben gesagt habe — als einen Bruchteil der Gewissheit auf, die abhängig ist von der Zahl und der Beweiskraft der Argumente für oder wider das Eintreten eines Ereignisses. Wer die Schriften *Bernoullis* wieder zur Hand nimmt, nachdem er *Keynes* gelesen hat, kann sich dem Eindruck nicht entziehen, dass dieser für seine — geistreiche und brillante, aber mich nicht überzeugende — Konstruktion der subjektiv begründeten Wahrscheinlichkeitstheorie direkt bei *Bernoulli* geschöpft hat.

Subjektive und objektive Auffassung der Wahrscheinlichkeit bilden andererseits, meiner Ansicht nach, wohl zwei verschiedene, aber nicht unvereinbare Standpunkte, und die Ergebnisse zu denen man auf Grund der einen Auffassung gelangt, können gewöhnlich leicht auch auf Grund der anderen gewonnen werden. So verhält es sich mit der Unterscheidung, die *Bernoulli* zwischen der Notwendigkeit bzw. Kontingenz eines Argumentes und der Notwendigkeit bzw. Kontingenz seiner Beweiskraft macht.

Ein Argument — sagt er — kann notwendig sein (*necessario existens*), doch nicht in der Weise, dass das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gemessen werden soll, notwendig daraus folgt (*contingenter indicans*); umgekehrt kann das Argument kontingent sein (*contingenter existens*), aber so, dass, wenn es besteht, das in Frage stehende Ereignis notwendig daraus folgt (*necessario indicans*); endlich kann das Argument kontingent sein (*contingenter existens*), aber dergestalt, dass, wenn es besteht, das in Frage stehende Ereignis nicht notwendig daraus folgt (*contingenter indicans*). Hier ein Beispiel, das *Bernoulli* anführt. Von meinem faulen Bruder habe ich seit langer Zeit keine Briefe erhalten. Was ist die Ursache? Ich kann drei Möglichkeiten in Betracht ziehen: die Faulheit, den Tod und die Geschäfte. Die Faulheit besteht zweifellos, aber sie schliesst nicht völlig aus, dass er mir schreiben könnte (*necessario existens*

et contingenter indicans); der Tod kann oder kann nicht eingetreten sein (*contingenter existens*), aber, wenn er eingetreten ist, so ist es ausgeschlossen, dass er mir schreiben kann (*necessario indicans*); die Geschäfte können die Ursache sein oder auch nicht, aber selbst wenn sie es sind, schliessen sie die Möglichkeit, mir zu schreiben, nicht völlig aus (*contingenter existens et contingenter indicans*).

Die *Bernoullische* Unterscheidung entspricht offensichtlich derjenigen zwischen der Wahrscheinlichkeit *a priori* der Ursachen und der Wahrscheinlichkeit, dass sich das Ereignis einstellt, nachdem die eine oder andere Ursache wirksam geworden ist. Auf diese Unterscheidung sollte sich ein halbes Jahrhundert später *Bayes*, der von einer objektiven Auffassung der Wahrscheinlichkeit ausging, zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* stützen. Auf diesem Gebiet ist *Bernoulli* also ein Vorläufer gewesen; aber auch hier wird deutlich, dass er den Graben, der die Wahrscheinlichkeit *a priori* von der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* trennt, nicht zu überbrücken vermochte. Die Bestimmung der wahrscheinlichen Ursache für das Ausbleiben der Briefe des Bruders stellt offensichtlich ein Problem der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* dar. *Bernoulli* hatte sich, indem er die *a priorische* Wahrscheinlichkeit der Ursachen von der Wahrscheinlichkeit unterschied, dass jede von diesen Ursachen das Ereignis bestimme, alle Elemente zurechtgelegt, um das Problem zu lösen; er musste aber den Ruhm, es gelöst zu haben, *Bayes* überlassen.

Die Untersuchungen *Bayes*'s, die postum in den Jahren 1764 und 1765 durch *Price* (in den «*Philosophical Transactions*» der Jahre 1763 und 1764) veröffentlicht wurden, fanden nicht sofort eine ihrer ganzen Tragweite entsprechende Würdigung; diese wurde offenbar, nachdem im Jahre 1774 *Laplace* dem Theorem von *Bayes* jene allgemeine und genaue Formulierung gegeben hatte, die seitdem traditional geworden ist¹.

Die Zeitgenossen gaben sich dann Rechenschaft darüber, dass die Lösung des grossen Problems durch *Jakob Bernoulli* dem Ziel nicht entsprach, das er sich gesteckt hatte. *Prevost* und *Lhuillier* erklären dies ausdrücklich²:

«Et d'abord Jac. Bernoulli et tous ceux qui ont suivi sa marche, n'ont fait, on doit le dire, que de vaines tentatives pour arriver à cette estimation [des causes]. Leurs méthodes, quelque belles et utiles qu'elles fussent à d'autres égards, ne reposant point sur le principe étimologique³, ne donnoient finalement que l'estimation des effets par la cause. C'est ce qu'on peut reconnoître en jetant les yeux sur le grand problème, en apparence expérimental, qui est résolu à la fin

¹ *P. S. de Laplace*, Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. «*Mém. prés. à l'Acad. des Sc.*», Vol. 6, S. 621—655, 1774.

² *P. Prevost et S. A. Lhuillier*, Remarques sur l'utilité et l'étendue du principe par lequel on estime la probabilité des causes. «*Mém. Ac. Berlin*» (1796), S. 25—41, 1799.

³ So hatten *Prevost* und *Lhuillier* in einer vorhergehenden Denkschrift das bekannte Prinzip bezeichnet, das *Laplace* der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten der Ursachen zugrunde gelegt hatte: «Si un événement peut être produit par un nombre *n* de causes différents, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'événement, sont entre elles, comme les probabilités de l'événement prises de ces causes.» (Siehe Mémoire sur l'art d'estimer la probabilité des causes par les effets. «*Mém. Ac. Berlin*» [1794], S. 3—24, 1799.)

de l'*Ars Conjectandi*, repris par Moyvre [sic!] Bayer [sic!] et Price, etc. ¹, et traité par ces divers mathématiciens d'une manière plus exacte, mais non sur d'autres principes. Dans ce problème, il s'agit de déterminer d'après la connoissance de la nature d'un dé, la probabilité qu'en jouant un très-grand nombre de coups, on obtiendra des résultats contenus entre certaines limites, voisines d'un rapport qu'indiquent les faces du dé. Ainsi on conclut dans ce problème de la cause aux effets, et non des effets à la cause. — Ces Stochasticiens se sont écartés du but, mais n'ont pas commis d'erreur» (S. 26/27).

Die Schlussfolgerung, zu der ich, im Gegensatz zu *Keynes*, durch die Analyse der *Ars Conjectandi* und des Briefwechsels mit *Leibniz* gelangte, noch bevor ich die Abhandlung *Prevosts* und *Lhuiliers* gelesen hatte, ist also — es wäre eigenartig, wenn es sich anders verhielte — eine Bestätigung dessen, was den Zeitgenossen von *Bayes* und *Laplace* nicht entgangen war.

Es gibt noch einen andern Punkt in der Wahrscheinlichkeitstheorie, den die Lektüre der *Ars Conjectandi* ins Licht rückt: es ist dies der Ursprung der sogenannten «Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit», nach der die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch das Verhältnis der dem Eintreffen des Ereignisses günstigen und sämtlichen ihm günstigen oder ungünstigen Fällen bestimmt ist, wobei alle Fälle gleich möglich sind.

Wir haben bereits gesehen, dass sich dieser Satz schon bei *Bernoulli* findet, jedoch nicht als eine *Definition*, sondern als ein *Mass* der Wahrscheinlichkeit, deren Begriff als schon gegeben vorausgesetzt wurde. In der Tat, wie lässt sich eine Grösse messen, wenn nicht dadurch, dass die Zahl der in ihr enthaltenen — gleich grossen — Masseinheiten bestimmt wird? Und wie misst man das Verhältnis zwischen zwei Grössen, wenn nicht dadurch, dass die Zahl der — gleich grossen — Masseinheiten, die in einer der beiden Grössen enthalten sind, mit der Zahl der in der anderen Grösse enthaltenen Masseinheiten verglichen wird? Das Wahrscheinlichkeitsverhältnis kann eben als ein Sonderfall des Verhältnisses zwischen zwei Grössen betrachtet werden: der Möglichkeit des Eintretens eines Ereignisses und der Möglichkeit des Eintretens eines umfassenderen Ereignisses, wobei das erste Ereignis als eine Modalität des letzteren betrachtet werden kann: nachdem eine Masseinheit der Möglichkeit, die als «Fall» bezeichnet wird, festgesetzt ist, folgt daraus die oben dargelegte Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

Diese stellt nicht — wie behauptet wurde — eine müssige Tautologie dar: wie alle Masszahlen besitzt sie in der Tat einen ökonomischen Wert, indem sie alle Abstufungen der Wahrscheinlichkeit auf eine Masseinheit zurückführt. Sie setzt aber andererseits den Begriff jener Masseinheit, d. h. jener des möglichen Falles, voraus, und daher enthebt sie uns nicht der Notwendigkeit, den Begriff der Möglichkeit oder der Wahrscheinlichkeit zu definieren.

In diesem Punkt hat *Bernoulli* klarer gesehen als die Mehrheit der modernen Wahrscheinlichkeitstheoretiker.

¹ Man beachte, dass sich *Prevost* und *Lhuilier* nicht davon Rechenschaft gaben, dass sich *Bayes* und *Price*, und nicht *Bernoulli* und *De Moivre*, mit dem Problem der Wahrscheinlichkeit der Ursachen befasst hatten. Wenn es um die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen geht, beziehen sie sich in dieser wie in ihren anderen Schriften stets und ausschliesslich auf *Laplace*.

Der Ruhm *Bernoullis* ist der Ruhm eines Analytikers und beruht auf dem Beweis des nach ihm benannten Theorems. Seine logische Schärfe, wie sie in der *Ars Conjectandi* und in dem Briefwechsel mit *Leibniz* hervortritt, wird aber nicht in angemessener Weise gewürdigt. Auch wenn seine Ergebnisse nicht abschliessend sind — dass zweieinhalb Jahrhunderte vergeblich verstrichen seien, wird man nicht erwarten —, stets werden uns die Klarheit, mit der er die Probleme stellt und gegeneinander abgrenzt, die Feinheit seines Denkens und die glückliche Wahl der Beispiele beeindrucken.

Es ist eigenartig, dass der vierte Teil der *Ars Conjectandi* — vom analytischen Standpunkt aus gesehen bei weitem der wichtigste, und vom logischen Gesichtspunkt aus der allein bedeutende — jener Teil ist, von dem am wenigsten Übersetzungen vorliegen. Während die Teile I und II einzeln ins Französische bzw. ins Englische übersetzt worden sind, besteht — meines Wissens — nur eine einzige deutsche Ausgabe des ganzen Werkes und keine gesonderte Übersetzung des vierten Teiles.

Wenn die Schweizerische Gesellschaft für Statistik und Volkswirtschaft, deren Zeitschrift in der Stadt erscheint, welche die Ehre hat, die Geburtsstadt *Jakob Bernoullis* zu sein, sich für eine englische oder französische Übertragung des vierten Teiles einsetzte, so würde sie, glaube ich, ihren bisherigen Verdiensten ein weiteres hinzufügen, indem sie den Vielen, denen es schwer fällt, den lateinischen oder deutschen Text zu lesen, die Möglichkeit geben würde, das Werk zu bewundern und über dessen Inhalt nachzudenken.
