

Annuitätentilgung und Ratentilgung

Ein Vergleich der Gesamtleistungen beider Verfahren

Von PD Dr. Hans Schubart, Karlsruhe

Vorbemerkung

Die finanzmathematische Literatur (etwa die Bücher von *Kosiol*¹, *Nicolas*² und *Timpe*³) behandeln im allgemeinen zwei Verfahren der Tilgung einer Schuld. Diese werden gewöhnlich als «Ratentilgung» bzw. «Annuitätentilgung» bezeichnet. Bei der Ratentilgung bezahlt der Schuldner jedes Jahr (während der Tilgungsdauer) die gleiche Tilgungsrate und einen von Jahr zu Jahr geringer werdenden Zinsbetrag. Damit nimmt die Höhe der jährlichen Gesamtleistung ab. Diese, die Annuitäten, bilden also eine arithmetische Folge erster Ordnung, deren Summe die Gesamtleistung des Schuldners darstellt. Bei der Annuitätentilgung dagegen bleibt die Höhe der Annuitäten während der Tilgungsdauer konstant. Nach Ende der Amortisation hat demnach der Schuldner als Gesamtleistung die konstante Annuität so oft bezahlt, wie die vorgeschriebene Dauer der Tilgung es bestimmt.

Im ersten Abschnitt werden zunächst die nötigen finanzmathematischen Formeln für die Ratentilgung kurz entwickelt, da sie in dieser Form weniger geläufig sind. Die bekannte Formel für die Annuität wird dagegen nur angegeben. Für die Gesamtleistungen beider Tilgungsarten kann im folgenden gezeigt werden, dass der Schuldner bei der Ratentilgung stets weniger zu zahlen hat als im Falle der Annuitätentilgung. Als mathematische Hilfsmittel werden lediglich zwei verhältnismässig elementare Aussagen der Differentialrechnung benötigt. Auf einige Folgerungen für die Praxis wird in der Schlussbemerkung kurz eingegangen.

Problemstellung

Soll eine Gesamtschuld von K_0 Währungseinheiten in n Jahren nach dem Verfahren der Ratentilgung amortisiert werden, so hat der Schuldner (bei nachschüssiger Zahlung) jährlich $\frac{K_0}{n}$ als Tilgungsrate und im k -ten Jahr

¹ E. Kosiol, Finanzmathematik, Verlag Gabler, Wiesbaden 1957.

² M. Nicolas, Finanzmathematik (Sammlung Göschen, Band 1183/1183a), Berlin 1959.

³ A. Timpe, Einführung in die Finanzmathematik und Wirtschaftsstatistik, Verlag für Angewandte Wissenschaften, Wiesbaden 1953.

($k = 1, 2, \dots, n$) jeweils $K_0 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{p}{100} = \frac{K_0}{n} (n-k+1) \frac{p}{100}$ an Zinsen zu zahlen.

Die Annuität beträgt demnach

$$A_k = \frac{K_0}{n} \left(1 + \frac{(n-k+1)p}{100}\right) = \frac{K_0}{n} (1 + (n-k+1)i) \quad \left(i = \frac{p}{100}, k = 1, 2, \dots, n\right).$$

Seine Gesamtleistung ergibt sich also zu

$$\sum_{k=1}^n A_k = K_0 + \frac{K_0 i}{n} \sum_{k=1}^n (n-k+1) = K_0 + \frac{i K_0}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

oder

$$\sum_{k=1}^n A_k = K_0 \left(1 + \frac{i(n+1)}{2}\right). \quad (1)$$

Ist dagegen Annuitätentilgung vereinbart, so ergibt sich für die gleichbleibende Annuität A nach den bekannten Formeln

$$K_0 q^n = A s_n \quad \left(q = 1 + i, s_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

oder

$$A = K_0 \frac{q^n}{s_n} = \frac{K_0}{a_n} \quad \left(a_n = v + \dots + v^n, v = \frac{1}{q}\right).$$

Die Gesamtleistung ergibt sich zu

$$nA = K_0 \frac{n}{a_n}. \quad (2)$$

Für $n = 1$ sind naturgemäss beide Gesamtleistungen gleich, bei einer längeren Dauer der Amortisation ergeben sich aus den Tafeln der finanzmathematischen Literatur höhere Gesamtleistungen bei der Annuitätentilgung, wenn für i und n feste vertafelte Werte vorgegeben werden. Diese Beispiele sind selbstverständlich kein Beweis dafür, dass für beliebiges i und n stets $\frac{n}{a_n} > 1 + \frac{i(n+1)}{2}$ oder mit andern Worten die Gesamtleistung bei der Annuitätentilgung für alle $n \geq 2$ und beliebiges i stets grösser ist als die Gesamtleistung bei der Ratentilgung. Der Beweis für diesen Sachverhalt soll im folgenden Text mit verhältnismässig elementaren Mitteln geführt werden.

Vergleich der Gesamtleistung

Wir benötigen neben den üblichen Formeln der Finanzmathematik folgende Ergebnisse der Differentialrechnung:

I. Aus der *Taylor*schen Formel für $\log(1+x)$ ($x > 0$)¹ folgt

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

II. Ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $y=f(x)$ stets positiv, so wächst die Funktion monoton.

Wir betrachten die Differenz $D(n) = \frac{n}{a_n} - 1 - \frac{i(n+1)}{2}$ und beweisen den

Satz: Für alle $n \geq 2$ und beliebiges $i = \frac{p}{100}$ ist $D(n)$ stets positiv.

Wegen $D(n) = \frac{2n - 2a_n - ia_n(n+1)}{2a_n}$ und $a_n = \frac{1-v^n}{i}$ genügt es, (da $2a_n$ stets grösser als Null ist) den Zähler von $D(n)$, also den Ausdruck $2n - 2a_n - ia_n(n+1)$ zu untersuchen. Mit $a_n = \frac{1-v^n}{i}$ erhalten wir für diesen

$$2n - \frac{2(1-v^n)}{i} - (1-v^n)(n+1) = \frac{2ni - 2(1-v^n) - i(1-v^n)(n+1)}{i}.$$

Wieder beschränken wir uns (wegen $i = \frac{p}{100} > 0$) auf die Betrachtung des Zählers und werden zeigen, dass $2ni - 2(1-v^n) - i(1-v^n)(n+1) = z(n)$ grösser als 0 ist. Zur Vereinfachung der Rechnung bilden wir $q^n z(n) = z_1(n)$ und werden die Ungleichung $z_1(n) > 0$ beweisen, woraus dann mit $q^n > 0$ auch $z(n) > 0$ und schliesslich $D(n) > 0$ sich ergeben werden.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } q^n z(n) &= z_1(n) = 2niq^n - 2(q^n - 1) - i(q^n - 1)(n+1) \\ &= 2niq^n - 2(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) - i(q^n - 1)(n+1) \\ &= 2niq^n - 2i(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) - i(q^n - 1)(n+1) \\ &= i[2nq^n - 2 - 2(q + q^2 + \dots + q^{n-1}) - nq^n - q^n + n + 1] \\ &= i \left[(n-1)q^n + n - 1 - 2q \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q-1} \right) \right] \\ &= i \left[(n-1)(q^n + 1) - \frac{2q^n}{q-1} + \frac{2q}{q-1} \right]. \end{aligned}$$

¹ $\log$ bedeutet hier und für das weitere den natürlichen Logarithmus zur Basis $e = 2,71828\dots$

Wieder können wir uns auf die Untersuchung des Ausdrucks in der Klammer beschränken. Wir betrachten daher die Funktion

$$z_2(n) = (n-1)(q^n + 1) - \frac{2q^n}{q-1} + \frac{2q}{q-1}. \quad (3)$$

Hier ist $z_2(1) = 0$, was zu erwarten war; weiter gilt

$$\begin{aligned} z_2(2) &= q^2 + 1 - \frac{2q^2}{q-1} + \frac{2q}{q-1} = \frac{iq^2 + i - 2q^2 + 2q}{i} \\ &= \frac{i(q^2 + 1) - 2q^2 + 2q}{i} = \frac{(q-1)(q^2 + 1) - 2q^2 + 2q}{i} \\ &= \frac{(q-1)(q^2 + 1) - 2q(q-1)}{i} = q^2 + 1 - 2q = (q-1)^2 = i^2 \end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned} z_2(3) &= 2(q^3 + 1) - 2(q + q^2) = 2(q^3 - q^2) - 2(q-1) \\ &= (q-1)(2q^2 - 2) = 2(q-1)^2(q+1) = 2i^2(q+1). \end{aligned}$$

Damit haben wir unseren Satz für $n=2$ und $n=3$ bewiesen. Für $n > 3$ wird eine analoge Rechnung wesentlich umständlicher und lässt auch nicht ohne weiteres einen allgemeinen Weg zur Lösung unseres Problems erkennen.

Wir merken noch an, dass aus (3) sicher $z_2(n) > 0$ folgt, wenn

$$(n-1)q^n > \frac{2q^n}{q-1} = \frac{2q^n}{i}$$

gilt. Diese letzte Ungleichung ist mit $n-1 > \frac{2}{i}$ gleichbedeutend.

Damit erhalten wir

$$n > \frac{2}{i} + 1 = \frac{200}{p} + 1. \quad (4)$$

Diese letzte Ungleichung ist für ein hinreichend langes Moratorium sicher erfüllt. Allerdings ergibt sich dabei etwa bei einem perannalen Zinsfuss von 5% ($p=5$) $n > 41$, während für $4 \leq n \leq 41$ noch keine Aussage möglich ist. Ausserdem werden die oben errechneten Differenzen sehr klein

$$\begin{aligned} \left(\text{z. B. } D(3) &= \frac{z(3)}{2a_3 i} = \frac{z(3)}{2(1-v^3)} = \frac{z_1(3)}{2(q^3-1)} = \frac{iz_2(3)}{2(q^3-1)} = \frac{i^3 2(q+1)}{2(q^3-1)} \right. \\ &= \left. \frac{i^2(q+1)}{1+q+q^2} < \frac{2i^2}{3}, \text{ also für } p=5: D(3) < 17 \cdot 10^{-4} \right), \end{aligned}$$

so dass es durchaus möglich wäre, für bestimmte n , die nicht der Ungleichung (4) genügen, auch negative Werte für $D(n)$ zu erhalten. Um zu beweisen, dass $z_2(n)$ für alle $n \geq 2$ positive Werte annimmt, bilden wir die Ableitung von $z_2(n)$ nach n .

Es ist

$$\begin{aligned} z_2'(n) &= q^n + 1 + (n-1)q^n \log q - \frac{2q^n \log q}{q-1} \\ &= \frac{i(q^n + 1) + i(n-1)q^n \log q - 2q^n \log q}{i} = \frac{d(n)}{i}. \end{aligned} \quad (3')$$

Mit $d(n) = iz_2'(n)$ bilden wir (5)

$$\begin{aligned} d'(n) &= iq^n \log q + iq^n \log q + i(n-1)q^n (\log q)^2 - 2q^n (\log q)^2 \\ &= q^n \log q (2i + i(n-1) \log q - 2 \log q). \end{aligned} \quad (5')$$

In dieser letzten Gleichung ist $q^n \log q = (1+i)^n \log(1+i) > 0$ und aus unserer Bemerkung I von oben folgt für

$$\begin{aligned} (2i + i(n-1) \log q - 2 \log q) &= 2i + i(n-1) \log(1+i) - 2 \log(1+i) > \\ i(n-1) \log(1+i) + 2i - 2i + \frac{i^2}{2} - \frac{2i^3}{3} &= i(n-1) \log(1+i) + \frac{i^2}{2} \left(1 - \frac{4i}{3}\right). \end{aligned}$$

Diese letzten beiden Summanden sind aber positiv, denn der erste Summand ist für $n \geq 2$ sicher grösser Null und der zweite wäre höchstens für $1 - \frac{4i}{3} < 0$ also $i > \frac{3}{4}$ negativ; solche Werte von i bzw. p sind aber für die

Praxis der Finanzmathematik ohne Bedeutung, da sie einer Verzinsung mit mehr als 75% p. a. entsprechen würden. Ausserdem würde dann aber unsere Ungleichung (4) zu $n > 3$ führen oder unser Satz wäre, da $D(2) > 0$ und $D(3) > 0$ schon bewiesen wurden, allgemein verifiziert.

Nach unserer Bemerkung II ist, da $d'(n) = iz_2''(n)$ stets positive Werte annimmt, $z_2'(n)$ monoton wachsend. Wenn wir zeigen können, dass $z_2'(n)$ positiv ist, so erlaubt uns dieses Ergebnis folgende Aussage:

$z_2'(n)$ ist für alle $n \geq 1$ sicher positiv. Nach (3') ist aber

$$z_2'(1) = q + 1 - \frac{2q}{i} \log q = (1+i) + 1 - \frac{2(1+i)}{i} \log(1+i) > \quad (\text{nach I})$$

$$\begin{aligned} 2 + i - \left(\frac{2+2i}{i}\right) \left(i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3}\right) &= 2 + i - (2+2i) \left(1 - \frac{i}{2} + \frac{i^2}{3}\right) \\ &= 2 + i - 2 + i - \frac{2}{3}i^2 - 2i + i^2 - \frac{2}{3}i^3 = \frac{i^2}{3} - \frac{2}{3}i^3 = \frac{i^2}{3}(1-2i) > 0 \end{aligned}$$

(denn $1-2i < 0$, also $i > \frac{1}{2}$, würde wieder nach (4) zur allgemeinen Gültigkeit unseres Satzes führen, da $D(4) > 0$ sich noch durch Rechnung bestätigen lässt).

Somit folgt aus II, dass $z_2(n)$ für alle $n \geq 1$ monoton wächst und wegen $z_2(2) > 0$ also $z_2(n) \geq z_2(2) > 0$.

Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Abschliessend sei für den mathematisch etwas geübteren Leser noch folgender Beweis kurz skizziert. Schreiben wir nach (3)

$$z_2(n) = \frac{P_{n+1}(q)}{q-1}, \text{ so folgt sofort } P_{n+1}(1) = P'_{n+1}(1) = P''_{n+1}(1) = 0$$

($P_{n+1}(q)$ ein Polynom vom Grade $n+1$ in q)

$$\text{oder} \quad z_2(n) = (q-1)^2 Q_{n-2}(q). \quad (6)$$

In (6) hat das Polynom $Q_{n-2}(q)$ die durch ihre Symmetrie überraschende Form

$$Q_{n-2}(q) = \sum_{l=1}^{n-1} (n-l) l q^{n-1-l}, \quad (7)$$

was durch Rechnung oder über das Horner Schema leicht bestätigt werden kann. Damit ist $z_2(n)$ für alle n und für $q > 1$ sicher positiv und wir erhalten als Ergebnis:

$$D(n) = \left((q-1)^2 \sum_{l=1}^{n-1} (n-l) l q^{n-1-l} \right) : \left(2 \sum_{l=0}^{n-1} q^l \right). \quad (8)$$

Schlussbemerkung

Wir haben somit zeigen können, dass für jedes mindestens zwei Jahre währende Moratorium und bei beliebig vorgegebener Verzinsungshöhe für den Schuldner – wird die Gesamtleistung verglichen – stets die Ratentilgung günstiger ist. Trivialerweise ist die Mehrleistung bei verhältnismässig kurzer Tilgungsdauer, wie schon die Werte von $D(2)$ bzw. $D(3)$ zeigten, gering. Als Moratorium werden aber in der Praxis auch oft grössere Zeiträume bestimmt, für die dann die Mehrleistung keineswegs unerheblich bleibt. Bei einem perannalen Zinsfuss von 6% und einem Moratorium von 10 Jahren übertrifft die Gesamtleistung der Annuitätentilgung die der Ratentilgung bereits um rund 3% der Schuld (in Formeln: $D(10) \approx 0,03$ für $p = 6$), während bei gleichem perannalen Zinsfuss und einem Moratorium von 21 Jahren die Mehrleistung schon ungefähr ein Achtel der Schuld ausmacht (in Formeln: $D(21) \approx 0,125$ für $p = 6$).