

Ein Urnenschema für das «Aussterben der Geschlechter»

Von Robert Ineichen, Technikum Luzern und Universität Freiburg

1. Einige Vorbemerkungen

«Jeder biologisch und praktisch bedeutungsvolle Komplex der ‚Erfahrungswelt‘, enthält eine *Aufforderung* zu einer mathematischen, das heisst strengen begrifflichen Analyse, Idealisierung und Synthese, zur Schaffung eines Bildes derjenigen ‚Strukturen‘, welche er in seinem Naturzustand verbirgt.» So schreibt *Rolf Nevanlinna* [14], und er fährt übrigens fort mit der Feststellung: «Solange die Mathematik diesem ebenso organischen wie freien Weg gefolgt ist, hat sie ihre Lebenskraft bewahren können.»

Uns scheint, gerade die Wahrscheinlichkeitsrechnung zeige sehr hübsch, wie gewisse mathematische Theorien (so die Geometrie, dann eben die Wahrscheinlichkeitsrechnung, aber auch die Zahlen- und Gleichungslehre) als Präzisierungen der Erfahrungswelt geschaffen werden und wie sie sich dann verselbständigen. – Dies gilt nun nicht nur für die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Ganzes, sondern auch für manches Einzelproblem dieser Disziplin. Im folgenden soll ein solches Einzelproblem behandelt werden. Dabei wollen wir nach der Formulierung des Problems so vorgehen: Wir versuchen, ein Schema – in unserem Fall ein Urnenschema – zu gewinnen, das eine mathematische Behandlungsmöglichkeit verspricht: wir «*mathematisieren*» *das Problem*. Anschliessend folgt die eigentliche mathematische Behandlung des Problems: das ist dann *eine intern mathematische Angelegenheit*.

2. Problemstellung

Wir denken uns einen männlichen Neugeborenen als *Stammvater eines Geschlechtes*, als Begründer einer Linie (0. Generation). Die Zahl seiner männlichen Nachkommen, die als Stammhalter für den Fortbestand des Geschlechtes sorgen können, wollen wir als Wert einer Zufallsvariablen Z auffassen; für die Werte z von Z gelte $0 \leq z \leq \omega$. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bezeichnen wir mit p_z ; es ist also $W(Z = z) = p_z$, $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$. Diese männlichen Nachkommen bilden die 1. Generation. Unabhängig von Einflüssen der Vererbung, der Zeit oder der Umwelt bestehe nun für jeden männlichen Neugeborenen der 1. Generation *wieder* die *Wahrscheinlichkeit* p_z , im Laufe seines Lebens genau z männliche Nachkommen zu haben. Diese männlichen Nachkommen der 1. Generation bilden die 2. Generation. Wiederum bestehe für jeden von diesen – unabhängig von den oben genannten Einflüssen – die Wahrscheinlichkeit p_z im Laufe seines Lebens genau z männliche Nachkommen zu erhalten usw. Wir stellen uns nun folgende Frage: *Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Geschlecht ausstirbt?*

Analoge Fragestellungen:

- *Genetik*: Durch eine spontane Mutation entsteht in einem Lebewesen ein neuartiges Gen; das Lebewesen mit diesem neuartigen Gen spielt die Rolle des «Stammvaters» (O.Generation). Für dieses Gen besteht eine Wahrscheinlichkeit p_z , in z direkten Nachkommen wieder aufzutreten. Diese z direkten Nachkommen bilden die 1.Generation; ihre direkten Nachkommen, die das betreffende neuartige Gen wieder enthalten, bilden die 2.Generation usw. Frage: Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Gen im Laufe der Zeit wieder verschwindet? Darüber finden sich Ausführungen bei R. A. Fischer in [6].
- *Warteschlange*: An einem Arbeitsplatz, an welchem immer nur ein Stück repariert werden kann, befinde sich ein Stück in Reparatur (O.Generation). Alle Stücke, die eintreffen, während der Zeit, da das Stück der O.Generation instand gestellt wird, bilden die 1.Generation; p_z ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während dieser Zeit genau z weitere Stücke eintreffen und warten müssen. Alle Stücke, die eintreffen, während ein Stück der 1.Generation repariert wird, bilden die 2.Generation. Nehmen wir jetzt – vereinfachend – an, sobald eine Generation 0 Stücke umfasse, werde die Arbeit eingestellt. Frage: Wahrscheinlichkeit, dass die Arbeit eingestellt werden kann?
- *Physik*: E. Schrödinger stellt in [8] ähnliche Betrachtungen an Kettenreaktionen an. Durch ein Neutron geeigneter Energie (O.Generation) wird mit Wahrscheinlichkeit p ein schwerer Kern gespalten, dabei entstehen m Neutronen, die die 1.Generation bilden; mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ wird kein solcher Kern gespalten, dann umfasst die 1.Generation 0 Objekte. Hier kann also die Zufallsvariable Z nur die beiden Werte m und 0 annehmen; es ist $p_0 = q = 1 - p$, $p_m = p$ und für $z \neq 0$, m ist $p_z = 0$.

Ein Gegenbeispiel: Vor dem roten Lichte einer Verkehrsampel warte ein Fahrzeug (0.Generation). Alle Fahrzeuge, die während des Wartens dieses Fahrzeugs eintreffen, bilden die 1.Generation; p_z sei die Wahrscheinlichkeit, dass während dieses Wartens z weitere Fahrzeuge eintreffen. Nun erscheint kurz grünes Licht; das Fahrzeug der 0.Generation und einige Fahrzeuge der 1.Generation können weiterfahren, einzelne kommen aber vielleicht nicht mehr durch. Die Fahrzeuge, die jetzt eintreffen, während noch Fahrzeuge der 1.Generation warten, bilden die 2.Generation usw. Hier werden aber in der Regel unsere obigen Voraussetzungen *nicht* mehr zutreffen: Die ersten paar Fahrzeuge der 1.Generation dürften beim Aufleuchten von Grün sofort durchkommen; sie haben keine «Nachkommen», für sie gilt $p_0 = 1$, $p_z = 0$ für $z \geq 1$. Für weiter hinten wartende Fahrzeuge der 1.Generation dürfte hingegen $p_0 \neq 1$ sein und damit $p_z \neq 0$ für $z \geq 1$.

3. Ein passendes Urnenschema

Im Rahmen von allgemeineren Betrachtungen kann die oben formulierte Frage mit Hilfsmitteln angegangen werden, wie sie in der Theorie der Verzweigungsprozesse (der branching processes) üblich sind, also vor allem mit erzeugenden Funktionen. Für diesen Weg sei auf die Werke von W. Feller [1] oder T. E. Harris [3] verwiesen oder auf unsere Arbeit [4]. Wir wollen einen andern Weg gehen: Es schien uns reizvoll, für die Beantwortung der obigen anschaulichen Fragestellung nach einem einfacheren, ebenfalls sehr

anschaulichen Weg Ausschau zu halten. Wir haben deshalb folgendes *Urnen-schema* entwickelt, an welchem wir unsere weiteren Überlegungen durchführen wollen:

Wir denken uns eine mit Kugeln gefüllte Urne. Jede dieser Kugeln trage eine nichtnegative ganze Zahl z als Nummer; im übrigen seien alle Kugeln gleich und $0 \leq z \leq \omega$. Die Wahrscheinlichkeit, aus der gut durchmischten Urne eine Kugel mit der Nummer z zu ziehen, sei p_z . Es ist dann $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$, und es sei $p_0 \neq 0$ und $p_\omega \neq 1$. Nun wird folgendes Spiel gespielt:

1. *Akt*: Es wird eine Kugel gezogen und ihre Nummer $z = z_1$ notiert. Dann wird die Kugel zurückgelegt und die Urne wieder gut durchmischt.

2. *Akt*: Nun werden nacheinander z_1 Kugeln gezogen. Dabei legen wir jede Kugel, nachdem wir ihre Nummer notiert haben, wieder zurück und mischen, bevor wir die nächste Kugel ziehen («Ziehen mit Zurücklegen»). Wir bilden die *Summe* z_2 der in diesem Akt notierten Nummern.

3. *Akt*: In analoger Weise ziehen wir nun z_2 Kugeln, wieder mit Zurücklegen, und bilden die Summe z_3 ihrer Nummern usw.

Sobald eine der Summen $z_i = 0$ ist, brechen wir das Spiel ab; wir setzen dann in naheliegender Weise $z_{i+k} = 0$ für $k = 1, 2, 3 \dots$

Vergleichen wir nun unser Urnenschema mit unserm Problem des Aussterbens der Geschlechter! Wir erkennen sofort, dass die eine im 1. Akt gezogene Kugel den «Stammvater» darstellt, der z_1 «männliche Nachkommen» der 1. Generation erzeugt. Die z_1 männlichen Nachkommen der 1. Generation erzeugen total z_2 «männliche Nachkommen» der 2. Generation, indem man ja z_1 -mal in die Urne langt (mit Zurücklegen) und jedesmal eine mit einer Nummer versehene Kugel herauszieht. Jede dieser Nummern stellt die Anzahl «männlicher Nachkommen» je eines Vertreters der 1. Generation dar; ihre Summe, z_2 gibt uns die Zahl der Vertreter der 2. Generation usw.

Unsere obige Frage nach dem Aussterben des Geschlechtes spalten wir nun in zwei Teilfragen auf:

- a) Welches ist die Wahrscheinlichkeit q_n , dass $z_n = 0$ ist? q_n ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unser Spiel spätestens mit dem n -ten Akt abbricht.
- b) Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unser Spiel im Laufe der Zeit abbricht? Das heisst: Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ und wie gross ist allenfalls q ?

4. Die mathematische Behandlung unserer Fragen

a) Die Berechnung der q_n

Es ist natürlich $q_1 = p_0$, da ja p_0 die Wahrscheinlichkeit angibt, dass bereits nach dem 1. Akt mit dem Spiel abgebrochen wird, d. h. also, dass der Stammvater 0 männliche Nachkommen hat.

Wie gross ist q_n für $n > 1$?

Wir können diese Wahrscheinlichkeiten rekursiv berechnen, indem wir die folgenden Ereignisse $E_0, E_1, E_2, \dots, E_\omega$ einführen:

E_0 : Es wird im 1. Akt eine Kugel mit der Nummer 0 gezogen. Es ist also $z_1 = 0$, und das Spiel bricht bereits mit dem 1. Akt ab. Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür gegeben durch $W(E_0) = p_0$.

E_1 : Es wird im 1. Akt eine Kugel mit der Nummer 1 gezogen, und das Spiel bricht spätestens mit dem n -ten Akt ab. – Dann ist also $z_1 = 1$. Wenn wir nun im 2. Akt eine Kugel ziehen, so können wir diese Fortsetzung als Beginn eines neuen Spieles auffassen. Dieses neue Spiel muss nun aber spätestens nach $(n-1)$ Akten abbrechen. Dann ist aber $W(E_1) = p_1 q_{n-1}$.

E_2 : Es wird im 1. Akt eine Kugel mit der Nummer 2 gezogen, und das Spiel bricht spätestens mit dem n -ten Akt ab. Es ist also $z_1 = 2$. Wenn wir nun im 2. Akt zwei Kugeln ziehen (mit Zurücklegen, siehe oben), so können wir diese Fortsetzung unseres Spieles als Beginn von zwei neuen Spielen betrachten, die wir uns auch an zwei Urnen der obigen Art fortgesetzt denken können, wenn wir noch etwas anschaulicher sein wollen. Beide Spiele sollen nun aber spätestens nach $(n-1)$ Akten abbrechen. Dann wird $W(E_2) = p_2 q_{n-1}^2$.

Analog definieren wir die weiteren Ereignisse. E_j bedeutet also für $0 < j \leq \omega$: Im 1. Akt ergibt sich $z_1 = j$, und die Fortsetzung betrachten wir als Beginn von j neuen Spielen, die wir uns auch an j Urnen der obigen Art fortgesetzt denken können und die alle nach spätestens $(n-1)$ Akten abbrechen. Somit ist $W(E_j) = p_j q_{n-1}^j$.

Nun schliessen sich die Ereignisse $E_0, E_1, \dots, E_\omega$ gegenseitig aus; wir erhalten:

$$q_n = W(E_0) + W(E_1) + \dots + W(E_\omega) = \sum_{j=0}^{\omega} p_j q_{n-1}^j.$$

Ganz analog finden wir q_2, q_3 usw.; stellen wir nun die Resultate zusammen, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= p_0 \\ q_2 &= p_0 + p_1 q_1 + p_2 q_1^2 + p_3 q_1^3 + \dots + p_\omega q_1^\omega = f(q_1), \\ q_3 &= p_0 + p_1 q_2 + p_2 q_2^2 + p_3 q_2^3 + \dots + p_\omega q_2^\omega = f(q_2), \\ &\vdots \\ q_n &= p_0 + p_1 q_{n-1} + p_2 q_{n-1}^2 + p_3 q_{n-1}^3 + \dots + p_\omega q_{n-1}^\omega = f(q_{n-1}), \\ &\vdots \\ \text{usw.} \end{aligned} \right\} (*)$$

Definieren wir jetzt auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ eine Funktion f durch

$$f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \dots + p_\omega x^\omega,$$

so liefern die Funktionswerte von f für $x = 0, q_1, q_2, \dots$ gerade die durch die obigen Gleichungen (*) gegebenen Wahrscheinlichkeiten $q_1, q_2, \dots$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel spätestens nach dem ersten bzw. zweiten bzw. dritten Schritt usw. abbricht.

Kehren wir zu unserem Problem des Aussterbens der Geschlechter zurück, so liefern die Gleichungen (*) *die Wahrscheinlichkeiten, dass spätestens in der 1, 2, ..., n-ten, ... Generation keine männlichen Nachkommen mehr vorhanden sind.*

b) Die Berechnung von q

Nun wenden wir uns der Frage zu, *welche Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass das Spiel im Laufe der Zeit abbricht.* Diese Frage läuft offenbar auf die Untersuchung von $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ hinaus; es ist also die Folge der durch die Gleichungen (*) gegebenen $q_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots$ zu untersuchen.

Beachten wir zunächst, dass für die oben eingeführte Funktion f gilt:

$$f'(x) = p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2 + \dots + p_\omega x^{\omega-1} > 0 \text{ für alle } x > 0.$$

Das heisst aber, dass die Funktionswerte

$$q_1 = f(0), q_2 = f(q_1), q_3 = f(q_2), \dots, q_n = f(q_{n-1}), \dots$$

eine *monoton wachsende Folge* bilden. Da weiter die q_i Wahrscheinlichkeiten darstellen, so gilt für sie: $q_i \leq 1$ für $i = 1, 2, \dots, n, \dots$; unsere monoton wachsende Folge ist also auch noch nach *oben beschränkt*. Somit existiert der Grenzwert q dieser Folge, und es ist

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_{n-1}),$$

und wegen der Stetigkeit von f ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(q_{n-1}) = f(q)$, also $q = f(q)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass unser Spiel im Laufe der Zeit abbricht, d.h. dass das Geschlecht ausstirbt, ist somit gegeben als eine Lösung der Gleichung

$$x = f(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \dots + p_\omega x^\omega \quad (**)$$

im Intervall $0 \leq x \leq 1$.

Die obige Gleichung (**) hat als eine Lösung sicher 1, da nach Definition unseres Spieles $\sum_{z=0}^{\omega} p_z = 1$ ist. Hat sie im Intervall $0 \leq x \leq 1$ noch weitere Wurzeln? Man kann diese Frage – in Weiterführung eines Gedankens, der sich bei A. Lotka in [7] und W. Feller in [1] findet – in folgender Art anschaulich behandeln werden:

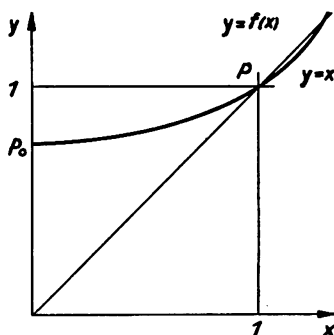
Wir betrachten die Graphen der beiden Gleichungen

$$y = x \text{ und } y = f(x),$$

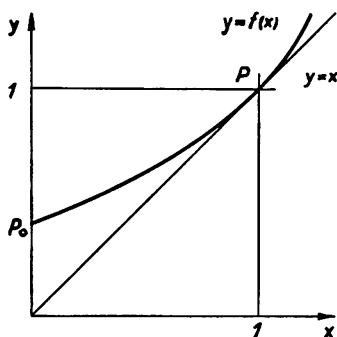
wobei f die bisherige Bedeutung habe. Da $1 = f(1)$ ist, so schneiden sich die beiden Graphen im Punkte $(1/1)$, und wir haben nur noch zu untersuchen, ob sie im Intervall $0 \leq x \leq 1$ noch *weitere Schnittpunkte* aufweisen.

Nun haben wir oben festgestellt, dass für $x > 0$ auch $f'(x) > 0$ ist, somit ist für solche Werte von x der Graph von f konvex, und es sind nur die drei Fälle denkbar:

(I) *Zweiter Schnittpunkt ausserhalb* $0 \leq x \leq 1$:



(II) *Berührung im Punkte* $(1/1)$:

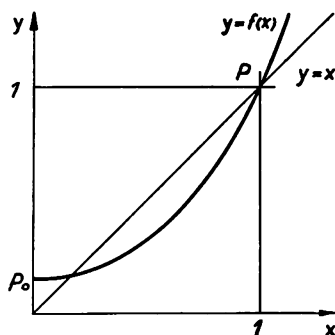


In diesen beiden Fällen ist also 1 die einzige uns interessierende Wurzel der Gleichung (**), und für die Wahrscheinlichkeit q , dass das Spiel im Laufe der Zeit abbricht, gilt

$$q = 1,$$

446 d. h. das Spiel bricht *sicher* im Laufe der Zeit ab.

(III) Zweiter Schnittpunkt innerhalb $0 \leq x \leq 1$:



Nur in diesem Falle hat die Gleichung (**) eine von 1 verschiedene Wurzel s in unserm Intervall; wegen der die Beschreibung unseres Urnenschemas ausdrücklich gemachten Voraussetzung $p_0 \neq 0$ muss $s > 0$, und ferner ist – wie auch die Figur sofort zeigt –

$$p_0 = q_1 < s.$$

Daraus folgt aber wieder wie oben, weil ja $s = f(s)$ ist, $f(q_1) = q_2 < f(s)$, usw., also auch $f(q_{n-1}) = q_n < f(s)$, d. h. aber, die Folge der q_i hat dieses s zum Grenzwert.

Somit ist in diesem Falle $q = s < 1$, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel im Laufe der Zeit abbricht, beziehungsweise dass das Geschlecht ausstirbt. Und weiter ist $1 - q$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Geschlecht niemals ausstirbt.

Wir können nun die drei Fälle noch etwas anders charakterisieren:

Im Falle (I) und im Falle (II) ist offensichtlich $f'(1) \leq 1$, im Falle (III) ist hingegen $f'(1) > 1$

Was bedeutet nun $f'(1) = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + \omega p_\omega$?

$f'(1)$ ist nichts anderes als der Erwartungswert einer Zufallsvariablen Z , die die Werte $0, 1, 2, 3, \dots, \omega$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ bzw. p_ω annimmt. In unserem Spiel ist Z gegeben durch die Nummern der Kugeln, die bei einem Zug aus der Urne erscheinen können. In unserm ursprünglichen Problem geben die Werte von Z die Zahl der direkten männlichen Nachkommen des Stammvaters oder irgendeines Vertreters einer späteren Generation, die mit der Wahrscheinlichkeit $W(Z = z) = p_z$ angenommen werden. Jetzt erhält der Erwartungswert $E(Z)$ eine sehr anschauliche Bedeutung:

$E(Z) = f'(1)$ stellt den Erwartungswert der direkten männlichen Nachkommen für ein Element irgendeiner Generation dar, also etwa die «mittlere

Anzahl von direkten männlichen Nachkommen» eines Elementes einer Generation.

Und das Ergebnis unserer Untersuchung besagt:

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Geschlecht im Laufe der Zeit ausstirbt, ist genau dann kleiner als 1, wenn die «mittlere Anzahl von Nachkommen» eines Elementes irgendeiner Generation grösser als 1 ist. Genau in diesem Falle besteht also eine Wahrscheinlichkeit, die grösser als Null ist, dass das hoffnungsvoll begründete Geschlecht dereinst weiterblühe...

Es dürfte angebracht sein, nochmals auf die wesentlichsten vereinfachenden Annahmen hinzuweisen: Unsere p_z haben wir als zeitlich konstant angenommen. Wir haben also z. B. nicht berücksichtigt, dass infolge des Rückganges der Sterblichkeit immer mehr Neugeborene das heiratsfähige Alter erreichen und dass etwa eine «säkulare Zunahme der Heiratsfähigkeit» festgestellt werden kann. (Man vergleiche dazu die Arbeit [13] von *A. Moser*). Und wir haben z. B. weiter auch nicht berücksichtigt, dass die p_z davon abhängen könnten, ob das Element, das Nachkommen erzeugt, etwa aus einer Familie mit viel oder wenig Nachkommen stammt.

5. Zahlenbeispiele

Es stellt sich die Frage, wie man zu *Schätzwerten für die p_z* kommen kann. Ein naheliegender Weg ist der folgende: Wir nehmen eine passend ausgewählte Gesamtheit von N Neugeborenen. Wir stellen fest, dass N_z davon im Laufe ihres Lebens z männliche Nachkommen ($z = 0, 1, 2, 3, \dots \omega$) haben und berechnen die relativen Häufigkeiten N_z/N . So erhalten wir Schätzwerte für die p_z ; mit ihnen, oder wenn notwendig mit ausgeglichenen Werten, erhalten wir ein Modell für die oben geschilderte (vereinfachte) Situation. Es scheint uns nicht sehr einfach zu sein, aus *vorhandenen* statistischen Unterlagen zu solchen Schätzwerten zu kommen. Die besondere Art der Registerführung der Korporationsverwaltung Luzern gestattet nun für die *Luzerner Korporationsbürger* die Zahlen N_z/N einfach festzustellen. Wir erhielten 1964 für die 225 zwischen 1880 und 1889 geborenen Korporationsbürger Zahlen, die gestatten, die p_z wie folgt abzuschätzen:

$$p_0 \approx 0,630, p_1 \approx 0,196, p_2 \approx 0,102, p_3 \approx 0,058, p_4 \approx 0,009, p_5 \approx 0,005.$$

(Die Korporationsgemeinde Luzern entspricht der «Bürgergemeinde» in andern Städten.) Einzelheiten finden sich in [4].

Eine andere Möglichkeit besteht darin, in einem *Familienregister* festzustellen, mit welcher Häufigkeit die verschiedenen Anzahlen männlicher Nachkommen auftreten. Wir haben dies 1961 im Familienregister des Zivilstandskreises Römerswil LU für die 449 Familien der vor 1896 geborenen

Männer getan. Die grosse Mehrzahl dieser Männer ist in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts geboren. Aus der Studie [13] von *A. Moser* ergibt sich, dass in diesem Zeitraum etwa 55% der Geborenen im Laufe ihres Lebens eine Familie gegründet haben, damit lassen sich nun ebenfalls Schätzwerte gewinnen, z. B. $p_0 \approx 0,60$, $p_1 \approx 0,14$, $p_2 \approx 0,13$ usw.; die Einzelheiten sind in [4] dargelegt.

Schliesslich könnte man Zahlen über die «*ideale Familiengrösse*» heranziehen. *A. Miller* berichtet in seiner Arbeit [11] über derartige Erhebungen in Deutschland; er weist darauf hin, dass wir annehmen dürfen, eine Umfrage in der Schweiz würde nicht wesentlich verschiedene Zahlen liefern, und stellt ferner fest, dass eine enge Beziehung zwischen der «idealen» oder «gewünschten» Familiengrösse und der tatsächlichen Kinderzahl besteht. Wiederum können wir mit Hilfe der Studie [13] von *A. Moser* abschätzen, dass für den Zeitraum, in welchem die Befragten geboren worden sind, gilt, dass etwa 70% im Laufe ihres Lebens heiraten. Es ist dann eine einfache Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Schätzwerte für die p_z unter diesen Voraussetzungen zu berechnen; wir haben erhalten: $p_0 \approx 0,43$, $p_1 \approx 0,30$, $p_2 \approx 0,21$, $p_3 \approx 0,053$, $p_4 \approx 0,005$ und $p_5 \approx 0,002$.

Alle diese Zahlen führen übrigens auf Modelle, in denen der Schätzwert für den Erwartungswert $E(Z)$ kleiner als 1 ist; Linien, deren p_z durch solche Werte gegeben sind, erlöschen also mit Sicherheit.

Ein grundsätzlich anderer Weg ist der folgende: Wir untersuchen die *Nachkommenschaft eines Stammvaters* und bestimmen in jeder Generation die Anzahl männlicher Nachkommen, die im Laufe ihres Lebens $z = 0, 1, 2, \dots$ männlicher Nachkommen erhalten haben. Wir bezeichnen mit N_{mz} die beobachtete Zahl von Vertretern der m -ten Generation, die genau z männliche Nachkommen erhalten haben. In [2] hat *T. E. Harris* bewiesen, dass durch die Terme

$\sum_{m=0}^n N_{mz}/N$ gerade ein Maximum-Likelihood-Schätzung für die p_z gegeben

ist. Dabei ist $(n+1)$ die Zahl der beobachteten Generationen und N die Gesamtzahl der in allen diesen Generationen beobachteten männlichen Gliedern. Das kann uns auf die Idee bringen, die N_{mz} aus genealogischen Handbüchern zu gewinnen. Die Auszählungen erstrecken sich dann über relativ grosse Zeiträume, z. B. für die Familie der Segesser von Brunegg über die Zeit vom Ende des 15. Jahrhunderts bis um das Jahr 1900. Das muss natürlich zu Schätzwerten führen, die mit grosser Vorsicht aufzufassen sind, zeigen doch gerade die schon mehrmals zitierten Arbeiten [12, 13] von *A. Moser* und die Arbeit von *A. Burckhardt* [9] auf, dass solche relative Häufigkeiten starken zeitlichen Schwankungen unterworfen sind. Für die genannte Familie der Segesser von Brunegg, die wir gewählt haben, weil ihre Genealogie von einer Vollständigkeit ist, wie sie nur wenige andere Familien aufweisen, ergeben

Auszählungen anhand von [10] z.B. die Schätzwerte $p_0 \approx 0,63$, $p_1 \approx 0,10$ usw., Einzelheiten wieder in [4].

6. Ausblicke

Unser Urnenschema stellt einen Zufallsprozess, einen stochastischen Prozess dar. Unter einem *stochastischen Prozess* versteht man ganz allgemein eine Menge von Zufallsvariablen Z_t , die von einem Parameter t abhängen, der seine Werte in einem Intervall der reellen Achse annimmt.

In unserem Falle ist $Z_0 = 1$, es ist die Zahl der Elemente der 0. Generation. Es ist weiter $Z_1 = Z$; diese Zufallsvariable gibt, wie wir bereits wissen, durch ihre Werte die Zahl der Elemente der 1. Generation, und es ist $W(Z_1 = z) = p_z$. Allgemein geben die Werte der Zufallsvariablen Z_t die möglichen Zahlen von Elementen der t -ten Generation; ihre Wahrscheinlichkeiten liessen sich berechnen, es soll hier nicht darauf eingegangen werden.

Die Z_t stellen weiter einen sehr speziellen, stochastischen Prozess dar, nämlich eine *Markoffsche Kette*: Die Wahrscheinlichkeit, dass in der $(t+1)$ -ten Generation eine Anzahl Elemente, z.B. j Elemente, vorkommen, hängt nach unsern Voraussetzungen nur davon ab, wie gross die Anzahl i der Elemente in der t -ten Generation ist. Es lassen sich also *Übergangswahrscheinlichkeiten* P_{ij} angeben:

$$P_{ij} = W(Z_{t+1} = j \mid Z_t = i)$$

ist die Übergangswahrscheinlichkeit vom «Zustand» i zum «Zustand» j , wenn wir aus der üblichen Terminologie der Markoff-Ketten den Ausdruck «Zustand» übernehmen. In einer Markoff-Kette kann man aus der «bekannten Gegenwart» (hier Zustand i) auf die Zukunft (Zustand j) schliessen, ohne die Vergangenheit zu kennen.

Schliesslich wird unsere Markoffsche Kette mit den speziellen Voraussetzungen, die wir gemacht haben, als *Galton-Watson-Prozess* bezeichnet, nach dem Botaniker *F. Galton*, der sich ebenfalls mit dem Prozess des Aussterbens der Geschlechter beschäftigt hat und *H.W. Watson*, der eine erste (unvollständige) Lösung des Problem es gegeben hat. Der Theorie und den Anwendungen dieser Prozesse ist das erste Kapitel der Monographie [3] von *T.E. Harris* gewidmet.

Literatur

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- [1] *W. Feller*, An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2. Auflage, New York 1957.
- [2] *T.E. Harris*, Branching Processes, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. XIX, 1948.

- [3] *T. E. Harris*, The Theory of Branching Processes (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 119), Berlin/Göttingen/Heidelberg 1963.
 - [4] *R. Ineichen*, Vom Aussterben der Geschlechter, Mitt. naturf. Ges. Luzern 21, 1967.
 - [5] *R. Ineichen*, Anschauliche Behandlung eines Verzweigungsprozesses, Elemente d. Math. 24, 1969.
- Biologie, Physik*
- [6] *R. A. Fischer*, The genetical theory of natural selection, Oxford 1930.
 - [7] *A. Lotka*, Théorie analytique des associations biologiques, II^e partie (Actualités scientifiques et industriels N^o 780), Paris 1939.
 - [8] *E. Schrödinger*, Probability Problems in Nuclear Chemistry, Proc. of the Royal Irish Academy, Vol. LI, 1945–1948.
- Bevölkerungstatistik, Familienstatistik, Verschiedenes*
- [9] *A. Burckhardt*, Über Kinderzahl und jugendliche Sterblichkeit in früheren Zeiten, Zeitschrift für Schweiz. Statistik 1907.
 - [10] Genealogisches Handbuch zur Schweizer Geschichte, herausgegeben von der Schweiz. heraldischen Gesellschaft, Band III, Zürich 1908–1916.
 - [11] *A. Miller*, Die Fruchtbarkeit der schweizerischen Bevölkerung, Schweiz. Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik 1961.
 - [12] *A. Moser*, Familienstatistik und Bevölkerungsvermehrung, Mitt. des statist. Büros des Kantons Bern Nr. 45, 1962.
 - [15] *A. Moser*, Heirathshäufigkeit und Bevölkerungsreproduktion, Schweiz. Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik 1963.
 - [14] *R. Nevanlinna*, Reform des mathematischen Unterrichtes in der Schule, Math.-Physikal. Semesterberichte XIII. 1966.

Zusammenfassung

Ein Urnenschema für das « Aussterben der Geschlechter »

Ein männlicher Neugeborener sei Stammvater eines Geschlechtes. Die Zahl seiner männlichen Nachkommen, die für den Fortbestand des Geschlechtes sorgen, fassen wir als Wert einer Zufallsvariablen Z auf mit $W(Z=z) = p_z$. Unabhängig von Einflüssen der Umwelt, der Vererbung, der Zeit bestehe für jeden männlichen Nachkommen der 1. Generation dieselbe Wahrscheinlichkeit p_z für z männliche Nachkommen, ebenso in allen folgenden Generationen. – Frage: Wahrscheinlichkeit, dass das Geschlecht ausstirbt? (Analoge Fragestellungen in der Genetik, bei gewissen Warteschlangen und Kettenreaktionen.) – Die Beantwortung der Frage erfolgt an einem Urnenschema mit Hilfe der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung. – Für die p_z werden abschliessend verschiedene Schätzwerte gegeben.

Résumé

Un schéma d'urne pour l'extinction des races humaines

Admettons qu'un nouveau-né du genre masculin soit l'auteur d'une race. Le nombre de ses descendants masculins qui garantissent la continuation de la race est donné par la valeur d'une variable aléatoire Z avec $W(Z=z) = p_z$. Indépendamment

des influences extérieures, de l'hérédité et du temps, on admet pour chaque descendant masculin de la première génération la même probabilité p_z pour z descendants masculins, et de même pour toutes les générations suivantes. — Question: Quelle est la probabilité que la race s'éteigne? (Des questions analogues se posent pour la génétique, pour certaines queues d'attente et des réactions en chaîne.) — La réponse à la question se fait par un schéma d'urne à l'aide de la théorie élémentaire des probabilités. Finalement, on donne pour les p_z différentes valeurs d'estimation.

Summary

An Urn-Scheme für the Extinction of Human Races

Let a male new-born be the original ancestor of a race. The number of his male descendants which secure the continuation of the race be the value of the random variable Z with $W(Z=z) = p_z$. Let it further be assumed that, irrespective of environmental, genetic and time influences, for each male descendant of the first generation there is the same probability p_z to have male descendants. The same is assumed for all following generations.

Question: What is the probability of extinction of the race? (Analogic questions occur in genetics, waiting queues and chain reactions.)

The question is answered by an *urn-scheme* with the help of the *elementary* theory of probability.

Finally various estimates are given for the p_z .