

Fonction d'investissement pour la Suisse*

par Maurice N. Marchon, Fribourg

PREMIÈRE PARTIE

I. Introduction

Les deux pôles théoriques de la fonction d'investissement développée par *Jorgenson* sont: Le principe de l'accélérateur flexible (présenté entre autres par *Chenery*, *Goodwin* et *Koyck*) et la théorie néo-classique de l'accumulation optimale du capital.

Le principe de l'accélérateur flexible met l'accent sur la distribution dans le temps de la réaction des dépenses d'investissement causées par une variation du stock de capital désiré. Si l'on note par K_t le stock de capital existant au début la période t et par K_t^* le stock de capital désiré au temps t , on pose la relation d'ajustement partiel:

$$K_{t+1} - K_t = [1 - \lambda] [K_t^* - K_t] \quad (1)$$

où le paramètre $(1 - \lambda)$ mesure la proportion de l'écart entre le stock de capital désiré et le stock de capital existant que les entrepreneurs décident d'éliminer au cours de la période envisagée. Seulement dans le cas où λ prend la valeur zéro, la réaction des entrepreneurs est immédiate.

Par récursion, le stock de capital existant au début de la période $t + 1$ peut alors être représenté par une moyenne pondérée (suivant une progression géométrique) des différents niveaux de stock de capital désiré dans le passé:

$$K_{t+1} = [1 - \lambda] \sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda^{\tau} K_{t-\tau}^* \quad (2)$$

A partir du principe de l'accélérateur flexible, on peut construire une théorie complète de l'investissement en constatant qu'une partie de l'investissement brut est destinée au remplacement, car l'accélérateur flexible n'explique que l'investissement d'expansion. Par définition, l'investissement net, IN_t , est égal à l'accroissement du stock de capital:

$$IN_t = [1 - \lambda] [K_t^* - K_t] \quad (3)$$

* Ma gratitude s'adresse au professeur *Pietro Balestra* pour son soutien constant et ses précieuses suggestions.

Puisque l'investissement brut, I_t , est égal à l'investissement net plus l'investissement de remplacement, nous pouvons écrire :

$$I_t = [1 - \lambda] [K_t^* - K_t] + \delta K_t \quad (4)$$

où δ est le taux de dépréciation du capital.

Le deuxième volet fondamental est constitué par la théorie néo-classique de l'accumulation optimale du capital exposée par Arrow. Cette théorie trouve ses fondements dans les travaux de Tinbergen, Roos et Klein. Cette théorie détermine le chemin d'expansion optimal du stock de capital nécessaire à la maximisation de la valeur actuelle de la firme.

C'est dans ce contexte que *Jorgenson* a développé dans [3], [5], [6] sa théorie de l'investissement en apportant deux contributions importantes. Premièrement, en donnant une forme mieux adaptée à la structure temporelle de la réaction des dépenses d'investissement dues à un changement dans le stock de capital désiré. Cela en introduisant les fonctions à retards échelonnés rationnelles dont *Solow* avait déjà utilisé une forme particulière.

Deuxièmement, il présente une structure plus élaborée de la détermination du stock de capital désiré en spécifiant la façon dont intervient le coût du capital, le prix des biens d'investissement ainsi que la structure des taxes.

II. Conditions de l'accumulation optimale du capital

Le critère présumé des firmes est l'accumulation optimale afin de maximiser la valeur actuelle de la firme. On suppose que le processus de production peut être caractérisé par une fonction de production introduisant une relation entre le montant des inputs et le niveau de l'output. D'autre part, les firmes alimentent leur stock de capital par les flux de l'investissement net. Par simplification, on postule que la production, le travail et les biens d'investissement formant le capital sont homogènes.

Pour calculer la valeur actuelle de la firme, on doit déterminer le flux des revenus nets au temps t . On définit le revenu net au temps t par :

$$R(t) = p(t) Q(t) - w(t) L(t) - q(t) I(t) \quad (5)$$

où R , Q , L , I désignent respectivement le revenu net, la production, le travail et l'investissement et les lettres p , w et q leur prix correspondant.

La valeur actuelle de la firme désignée par V , étant donné un taux d'escompte constant à l'intérieur d'une période, est déterminée par l'expression :

$$V = \int_0^{\infty} e^{-rt} R(t) dt. \quad (6)$$

La valeur actuelle de la firme est maximisée sous deux contraintes.

Premièrement, le stock de capital est alimenté par les flux d'investissement et est soumis à un taux de dépréciation, δ . Ainsi, l'investissement net est égal à la variation du stock de capital (c'est-à-dire à l'investissement brut) moins le remplacement. La contrainte s'écrit :

$$K(t) = I(t) - \delta K(t) \quad (7)$$

où $K(t)$ est le taux de changement du stock de capital au temps t . Pour alléger la notation, on écrira dorénavant : K pour $K(t)$ et I pour $I(t)$ et ainsi de suite.

Deuxièmement, le niveau de la production est déterminé par une fonction de production exprimée sous sa forme explicite par :

$$Q = g(K, L). \quad (8)$$

On suppose que cette dernière possède des dérivées de premier et second ordre, que les deux facteurs aient un taux marginal de substitution positif et des productivités marginales positives. De plus, on doit avoir une fonction de production strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle possède un maximum.

On a un problème de calcul des variations avec contraintes. Pour résoudre ce problème, c'est-à-dire pour maximiser la valeur actuelle (6) sous les contraintes (3) et (8), on construit la fonction Lagrange :

$$L = \int_0^{\infty} \{e^{-rt} R(t) + \lambda_1(t) [Q - g(K, L)] + \lambda_2 [K - I - \delta K]\} dt. \quad (9)$$

Les conditions eulériennes de maximisation sont obtenues en prenant les dérivées partielles de premier ordre par rapport à Q , L , I , K , λ_1 et λ_2 . En annulant ces dérivées partielles, on tire les conditions marginales pour le travail et le capital :

$$g_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{w}{p} \quad (10)$$

$$g_K = \frac{q(r + \delta) - q}{p} = \frac{c}{p} \quad (11)$$

où

$$c = q(r + \delta) - q. \quad (12)$$

Cette dernière expression définit la valeur de la rémunération implicite des services du capital offerte par la firme à elle-même. Cette interprétation du prix $c(t)$ peut être justifiée en considérant la relation entre le prix des biens capitaux et le prix des services du capital, ce qui est intuitivement plausible puisque le capital est constitué par les biens d'investissement.

En premier lieu, le flux des services du capital, dans un intervalle de temps dt commençant au temps t , d'une unité de biens d'investissement acquise au temps s est :

$$e^{-\delta(t-s)} dt.$$

Si $c(t)$ est le prix des services du capital au temps t , alors la valeur escomptée des services du capital est : $e^{-rt} c(t)$, si bien que la valeur (coût fois quantité) du flux des services du capital dans l'intervalle dt est :

$$e^{-rt} c(t) e^{-\delta(t-s)} dt.$$

Similairement, si $q(s)$ est le prix des biens d'investissement au temps s , alors la valeur escomptée des biens capitaux est : $e^{-rs} q(s)$, si bien que la valeur d'une unité d'investissement au temps s est :

$$e^{-rs} q(s).$$

Mais, la valeur des biens d'investissement acquis au temps s est égale à la somme des valeurs escomptées des services du capital futurs dérivés de ces biens capitaux :

$$\begin{aligned} e^{-rs} q(s) &= \int_s^{\infty} e^{-rt} c(t) e^{-\delta(t-s)} dt \\ &= e^{\delta s} \int_s^{\infty} e^{-(r+\delta)t} c(t) dt. \end{aligned}$$

En résolvant pour le prix des biens d'investissement :

$$q(s) = \int_s^{\infty} e^{-(r+\delta)(t-s)} c(t) dt.$$

Pour obtenir le prix implicite des services du capital, il suffit de dériver cette expression par rapport au temps s , on obtient :

$$q(s) = 0 - c(s) - [r(s) + \delta] q(s)$$

d'où
$$c = q(r + \delta) - q.$$

Cette expression est identique à la condition (12).

III. Introduction du temps dans l'ajustement entre le stock de capital désiré et le stock de capital existant

S'il n'y avait pas de retard dans la réalisation des projets d'investissement, le niveau de l'investissement pour assurer l'accumulation optimale du capital peut être déterminé par les conditions marginales ci-dessus. Si l'on introduit le temps dans la réalisation des décisions d'investissement, cela implique que le niveau actuel du capital peut différer de celui obtenu par les conditions marginales. Ces conditions déterminent alors le *stock de capital désiré* et non pas le stock de capital effectif.

Le montant des dépenses d'investissement engagé pour atteindre le stock de capital désiré est le niveau des dépenses d'investissement d'expansion, I_t^E . Les dépenses d'investissement de remplacement, par contre, sont déterminées par le stock de capital existant.

Pour présenter les grandes lignes de la structure de l'investissement d'expansion, I_t^E , on pose la proportion des projets d'investissement décidés dans la période t et entièrement réalisés dans la période $t + \tau$ par $u_{t+\tau}$ et le niveau des projets d'investissement débutés dans la période par I_t^N . Dans chaque période le niveau des dépenses d'investissement est la moyenne pondérée des projets dont la réalisation a débuté dans les périodes antérieures :

$$I_t^E = u_0 I_t^N + u_1 I_{t-2}^N + u_2 I_{t-2}^N + \dots \quad (13)$$

En introduisant un opérateur de retard L défini par :

$Lx_t = x_{t-1}$ pour toute suite $\{x_t\}$, l'équation (13) devient :

$$I^E = u(L) I_t^N$$

où $u(L)$ est une série de puissances dans l'opérateur de retard,

$$u(L) = u_0 + u_1 L + u_2 L^2 + \dots$$

On suppose que le niveau du stock de capital désiré est égal au niveau actuel du capital plus le montant des projets d'investissement non-terminés. Cette supposition implique que de nouveaux projets sont mis en chantier dans chaque période jusqu'à ce que le montant des projets non-terminés égalise la différence entre le stock de capital désiré, K_t^* et le stock de capital actuel, K_t . Le montant des projets non-entièrement réalisés au début de la période t est la somme des parts non-terminées dans les projets commencés antérieurement. Ce montant est égal à la différence entre le capital désiré et le capital actuel :

$$K_t^* - K_t = I_t^N + (1 - u_0) I_{t-1}^N + (1 - u_0 - u_1) I_{t-2}^N + \dots \quad (14)$$

En utilisant l'opérateur de retard :

$$\begin{aligned} K_t^* - K_t &= [1 + L + L^2 + \dots] I_t^N - Lu(L) I_t^N + \dots \\ &= \frac{1}{1 - L} I_t^N - [L + L^2 + L^3 + \dots] u(L) I_t^N \\ &= \frac{1 - Lu(L)}{1 - L} I_t^N \end{aligned}$$

car
$$1 + L + L^2 + L^3 + \dots = \frac{1}{1 - L}$$

On peut interpréter ce résultat en disant que les nouveaux investissements débutés dans chaque période sont égaux aux changements dans le stock de capital désiré :

$$I_t^N = K_t^* - K_{t-1}^*$$

En second lieu, en utilisant la fonction (13) avec l'opérateur de retard, l'investissement d'expansion est une moyenne pondérée des changements antérieurs dans le stock de capital désiré :

$$I_t^E = u(L) [K_t^* - K_{t-1}^*].$$

En utilisant le même raisonnement pour l'investissement de remplacement, I_t^R , on peut poser l'investissement de remplacement comme une moyenne pondérée de l'investissement brut, I_t :

$$I_t^R = v(L) I_t \quad (15)$$

où $v(L)$ est une série de puissances dans l'opérateur de retard,

$$v(L) = v_0 + v_1 L + v_2 L^2 + \dots$$

Le stock de capital au début de la période est la somme des investissements nets passés:

$$K_{t+1} = \sum_{\tau=0}^{\infty} [I_{t-\tau} - I_{t-\tau}^R]$$

si bien que l'investissement de remplacement peut être exprimé comme une fonction des valeurs passées du stock de capital:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= [1 + L + L^2 + \dots] I_t - [1 + L + L^2 + \dots] I_t^R \\ &= \frac{1}{1-L} I_t - \frac{1}{1-L} I_t^R \\ &= \frac{1}{1-L} \frac{I_t^R}{v(L)} - \frac{1}{1-L} I_t^R \quad \text{par l'équation} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{d'où} \quad I_t^R = \frac{(1-L)v(L)}{1-v(L)} K_{t+1}. \quad (16)$$

On suppose maintenant une distribution géométrique de remplacement et que le remplacement intervient dans la période qui suit l'investissement. Une justification de cette insertion se trouve dans le fait qu'un accroissement dans la capacité du capital génère une distribution de remplacement dans le temps, mais chaque remplacement génère à nouveau un ensemble de remplacements. La distribution géométrique:

$$v(L) = \delta L + \delta(1-\delta) L^2 + \dots \quad (17)$$

qui sommée avec l'opérateur de retard devient:

$$v(L) = \frac{\delta L}{1-L+\delta L}$$

et introduite dans l'équation (16) donne l'investissement de remplacement comme une proportion du stock de capital existant au début de la période t :

$$I_t^R = \delta L K_{t+1} = \delta K_t. \quad (18)$$

La théorie complète de l'investissement résulte de la combinaison de la théorie de l'investissement pour l'expansion du capital avec la théorie du remplacement, c'est-à-dire:

$$I_t = u(L) [K_t^* - K_{t-1}^*] + \delta K_t. \quad (19)$$

IV. Spécification du modèle

Pour passer à l'estimation de la fonction d'investissement, il reste à spécifier la suite des coefficients $\{u_t\}$ de la distribution $u(L)$ et la fonction de production, $Q = g(K, L)$.

On suppose que la suite des coefficients $\{u_t\}$ de la distribution à retards échelonnés a une fonction génératrice rationnelle. Sous cette condition la fonction d'investissement peut s'écrire en terme d'investissement net:

$$I_t - \delta K_t = \frac{\gamma(L)}{w(L)} [K_t^* - K_{t-1}^*] \quad (20)$$

où $\gamma(L)$ et $w(L)$ sont des polynômes dans l'opérateur de retard. En multipliant l'équation (20) par $w(L)$ et en l'écrivant de façon explicite, où w_0 est normalisé à 1, on obtient:

$$[1 + w_1 L + w_2 L^2 + \dots] [I_t - \delta K_t] = [\gamma_0 + \gamma_1 L + \gamma_2 L^2 + \dots] [K_t^* - K_{t-1}^*]. \quad (21)$$

Choisissons maintenant une fonction de production particulière, une fonction de la forme Cobb-Douglas, afin d'obtenir une forme quantitative explicite du stock de capital désiré:

$$Q = AK^\alpha L^\beta$$

où $\alpha + \beta < 1$, c'est-à-dire des rendements d'échelle décroissants.

Pour une fonction Cobb-Douglas la condition marginale de la productivité du capital (11) s'écrit:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha \frac{Q}{K} = \frac{c}{p}$$

d'où l'on obtient le niveau de stock de capital désiré, K_t^* :

$$K^* = \alpha \frac{pQ}{c} \quad (22)$$

où α est l'élasticité de l'output par rapport à l'input des services du capital. On observe que les changements dans le stock de capital désiré sont connus à une constante multiplicative près, soit α . Du point de vue pratique, on estime d'abord les paramètres $\{\alpha\gamma_\tau\}$ et $\{w_\tau\}$ à partir de la fonction de distribution à retards échelonnés rationnelle (21), qui exprimée en terme de l'investissement brut et en remplaçant K_t^* par les valeurs calculées $p_t Q_t/c_t$ s'écrit:

$$\begin{aligned} I_t = & \alpha\gamma_0 \left[\frac{p_t Q_t}{c_t} - \frac{p_{t-1} Q_{t-1}}{c_{t-1}} \right] + \dots + \alpha\gamma_m \left[\frac{p_{t-m} Q_{t-m}}{c_{t-m}} - \frac{p_{t-m-1} Q_{t-m-1}}{c_{t-m-1}} \right] \\ & - w_1 [I_{t-1} - \delta K_{t-1}] - \dots - w_n [I_{t-n} - \delta K_{t-n}] \\ & + \delta K_t + \beta + \varepsilon_t \quad t = 1 \dots N \end{aligned} \quad (23)$$

où β est la constante de la régression; pour une fonction à retards échelonnés l'estimation de cette constante peut être interprétée comme la moyenne d'échantillonnage de l'erreur dans l'équation; où ε_t est le vecteur de erreurs et où N est le nombre d'observations.

Pourvu que les erreurs ε_t soient distribuées indépendamment et identiquement dans le temps et distribuées indépendamment de toutes les valeurs dans le changement du capital désiré et pourvu que la distribution à retards échelonnés de la fonction (23) considérée comme une équation de différence de l'investissement net soit stable, la méthode des moindres carrés ordinaire donne des estimateurs asymptotiquement efficaces et normaux.

En utilisant la contrainte: la suite des coefficients $\{u_\tau\}$ est unitaire, on peut obtenir un estimateur de α , disons $\hat{\alpha}$ à partir de l'expression¹:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{\tau=0}^m \alpha \hat{\gamma}_\tau}{\sum_{\tau=0}^n w_\tau} \quad (24)$$

¹ Pour de plus amples détails voir *Jorgenson* [4.]

DEUXIÈME PARTIE

I. Estimation de la fonction d'investissement

Pour tester la théorie développée dans la première partie, on a appliqué le modèle aux données annuelles, étant donné que ce sont les seules existantes, de la comptabilité nationale pour les années 1951-1968².

La variable dépendante dans l'équation (23) est l'investissement brut à prix constants³. Pour passer à l'estimation de cette fonction, on doit déterminer la valeur de $K_t^* = p_t Q_t / c_t$ que l'on connaît à une constante multiplicative près. On connaît $p_t Q_t$, valeur à prix courant de la production intérieure fournie par la comptabilité nationale. Dans notre travail, on n'a pas pris en charge la structure des impôts étant donné sa rigidité (elle n'est pas encore un paramètre d'action conjoncturelle). De plus, on suppose que tous les gains et les pertes en capital sont transitoires pour les firmes. Le prix de services du capital, c_t , est défini par l'expression⁴:

$$c_t = q_t [\delta + r_t]$$

où q_t est le prix des biens d'investissements, δ est le paramètre de remplacement⁵ et r_t le taux d'intérêt.

Ces différentes grandeurs étant calculées, on peut estimer les paramètres $\{\alpha\gamma_\tau\}$ et $\{w_\tau\}$ de la fonction (23). La valeur de ces paramètres est donnée par le tableau I, où l'on a les coefficients de régression non-contraints de $\{\alpha\gamma_\tau\}$ et $\{w_\tau\}$ ainsi que de δ .

Ces régressions sont effectuées sans utiliser la contrainte que les coefficients de la fonction à retards échelonnés correspondent à une distribution de proba-

² Sauf indication contraire, les données proviennent des comptes nationaux de la Suisse communiqués par le Bureau fédéral des Statistiques dans la Vie Economique.

³ L'investissement brut est égal à la formation de capital fixe, moins les travaux en génie civil (dont routes) publics. On a fait cette déduction, car la série du stock de capital à notre disposition ne l'avait pas inclus. L'investissement brut ainsi que le stock de capital sont à prix constant, ayant pour base les prix de 1958.

⁴ q_t est l'indice des prix de la formation de capital fixe (année de base 1958 = 100) et r_t est le taux d'intérêt moyen des emprunts par obligations des institutions financières publié dans « Das Schweizerische Bankwesen im Jahre 1960. »

⁵ On a d'abord calculé le taux de dépréciation moyen en calculant la proportion de la provision pour dépréciation du capital fixe par rapport au stock de capital au début de la période, $\delta = 0.0472$. Ce coefficient paraissant inférieur à la réalité, on a fait différentes itérations pour retenir finalement le taux de $\delta = 0.07$. On a donné aux pages 8 et 9, une justification théorique du taux de remplacement comme proportion du stock de capital. Une discussion sur les raisons du choix d'un taux de remplacement de 7 % est présentée à la fin de cette section.

bilité non-négative d'une variable aléatoire, à valeurs entières. En effet, on constate que la contrainte imposant un discriminant positif au polynôme $w(L)$ n'est pas satisfaite par la première forme de la régression non-contrainte. Etant donné que la contrainte $w_1^2 > 4w_2$ est effective, on a recherché une nouvelle forme d'estimation. Si la contrainte est satisfaite avec l'égalité, le polynôme caractéristique $\lambda^2 + w_1\lambda + w_2$ a deux racines caractéristiques identiques, tel que la fonction à retards échelonnés, $u(L) = \frac{\gamma(L)}{w(L)}$, suit une distribution de Pascal⁶.

Tableau I⁷. Coefficients de régression non-contraints

Régres	$\alpha\gamma_0$	$\alpha\gamma_1$	$\alpha\gamma_2$	w_1	w_2	δ	R^2	E. T.*	d
1	0.1224 (0.1455)			-1.2664 (0.2557)	0.5752 (0.3369)	0.080 (0.0146)	0.973	0.495	2.22 ^b
2	0.1526 (0.1742)	0.0452 (0.1727)		-1.2204 (0.2933)	0.5569 (0.3695)	0.079 (0.0160)	0.968	0.540	2.18 ^b
3	0.2706 (0.2505)	0.1002 (0.1958)	0.1083 (0.1601)	-1.2168 (0.3027)	0.5517 (0.3812)	0.078 (0.0166)	0.970	0.557	2.19 ^b
4	0.2022 (0.2029)		0.0743 (0.1395)	-1.2455 (0.2850)	0.5543 (0.3652)	0.78 (0.0159)	0.969	0.554	2.17 ^b

* Les écarts types de la régression (mais pas ceux des coefficients) ont été divisés par 1000.

a Test significatif de l'indépendance des erreurs pour $\mu = 0.05$

b Test situé dans la région d'indétermination.

Jorgenson et Stephenson ont utilisé dans leur article, [6], la procédure suivante: ils ont posé l'estimateur non-contraint w_1 comme un estimateur de w_1 et ont choisi w_2 en posant la relation: $w_2 = \frac{1}{4}w_1^2$; puis ils ont à nouveau estimé les paramètres $\alpha\gamma(L)$ et δ . Le principal défaut de cette méthode réside dans la rigidité imposée au polynôme de réaction de l'investissement net.

On a recherché une nouvelle méthode d'estimation contrainte en posant la relation:

$$w_1^i [IN_{t-1} - \frac{1}{4}w_1^j IN_{t-2}]$$

On remarque que le coefficient de IN_{t-2} sera $w_2 = \frac{1}{2}w_1^i w_1^j$, ce qui fait ressortir la dépendance entre l'estimateur de la nouvelle régression de la fonction d'investissement où seul w_1^i est estimé et l'estimateur w_2 supposé pour le calcul de la parenthèse de la relation (26).

⁶ Ces distributions à retards échelonnés ont été proposées par Solow, [7], et sont également traitées comme des cas particuliers dans Jorgenson [4].

⁷ Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur UNIVAC III de l'Institut pour l'automatisation de l'Université de Fribourg.

Etant donné cette dépendance, il faut comparer la valeur estimée, $\hat{w}_1^i$, de la nouvelle régression avec l'estimateur

$w_2 = \frac{1}{4}(w_1^i)^2$ supposé. Pour avoir un discriminant nul, la relation $(\hat{w}_1^i)^2 = 4w_2$ doit être vérifiée. Si $(\hat{w}_1^i)^2 \neq 4w_2$, il faut continuer le processus d'itération jusqu'à l'obtention de l'égalité, en cas de convergence. Si la valeur estimée, $\hat{w}_1^i$, vérifie l'inégalité $(\hat{w}_1^i)^2 < 4w_2$, on peut poser $w_1^i = \hat{w}_1^i$ pour obtenir un nouveau $w_2 = \frac{1}{4}(w_1^i)^2$ inférieur afin de diminuer l'écart observé.

Le tableau II présente l'évolution du processus de convergence vers une distribution à retards échelonnés de Pascal pour la régression 1 du tableau III.

Tableau II

Itération	$w_2 = \frac{1}{4}(w_1^i)^2$	$\hat{w}_1^i$	$(\hat{w}_1^i)^2 \geq 4w_2$
1	0.60	1.35	$1.82 < 2.40$
2	0.48	1.28	$1.65 < 2.40$
3	0.35	1.19	$1.41 = 1.40$
4	0.32	1.17	$1.37 > 1.28$
5	0.28	1.14	$1.30 > 1.12$

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte quadratique où aucune méthode de calcul direct existe. Par notre procédé, on se rapproche du principe du maximum de vraisemblance contraint, car on est certain que l'on ne peut pas obtenir un meilleur estimateur du polynôme. Dès que l'on dispose du discriminant nul, on a une distribution à retards échelonnés de Pascal.

Tableau III. Coefficients de régression contraints

Régres.	$\alpha\gamma_0$	$\alpha\gamma_1$	$\alpha\gamma_2$	w_1	w_2	δ	R^2	E.T.*	d
1	0.1125 (0.1395)			-1.1909 (0.1964)	0.35	0.074 (0.0083)	0.972	0.480	1.99 ^a
2	0.1092 (0.1460)	-0.0232 (0.0982)		-1.1893 (0.2047)	0.35	0.074 (0.0086)	0.972	0.500	1.98 ^a
3	0.2602 (0.2404)	0.0973 (0.1884)	0.1109 (0.1541)	-1.1077 (0.2309)	0.30	0.071 (0.0097)	0.970	0.536	1.84 ^b
4	0.1958 (0.1938)		0.0773 (0.1336)	-1.1698 (0.2176)	0.34	0.073 (0.0090)	0.970	0.511	1.94 ^a

* Les écarts types de la régression (mais pas ceux des coefficients) ont été divisés par 1000.

^a Test significatif de l'indépendance des erreurs pour $\mu = 0.05$

^b Test situé dans la région d'indétermination.

Le tableau III présente les quatre régressions retenues dans le tableau I, mais cette fois le polynôme $w(L)$ est celui obtenu par le processus décrit ci-dessus de façon à avoir une distribution de Pascal.

Un problème à résoudre en premier lieu est celui du choix de la forme de la fonction à retards échelonnés. Il n'y a pas de procédure statistique formelle pour la résolution des problèmes de choix multiples. Pour sélectionner la forme de nos polynômes $\alpha\gamma(L)$ et $w(L)$, on a fait différentes combinaisons entre les deux polynômes rationnels avec chacun des polynômes d'un degré inférieur ou égal à deux. On a pu vérifier très rapidement que des polynômes supérieurs étaient inadaptés. A l'intérieur des frontières choisies pour les degrés des polynômes, les critères de sélection sont les écarts types des coefficients et l'écart type de la régression.

Les tableaux I et III donnent trois mesures d'ajustement. Premièrement, le coefficient de régression multiple, R^2 , non-corrigé pour les degrés de liberté. Deuxièmement, l'écart type de la régression, E.T., corrigé des degrés de liberté. En dernier lieu, on a calculé la statistique de Durbin-Watson, d . Il faut noter que le test d est biaisé en faveur de l'indépendance des erreurs dans le cas de variables endogènes retardées; ce qui laisse présupposer la présence d'autocorrélation.

On notera que selon les critères développés ci-dessus la meilleure estimation de la fonction d'investissement est sans doute la première, soit pour l'estimation non-contrainte, soit pour l'estimation contrainte. On présente les trois autres estimations à titre de comparaison.

Le modèle théorique décompose l'investissement brut en deux parties: l'investissement de remplacement et l'investissement d'expansion. Lors de notre première approche, on a calculé le taux de remplacement en posant la relation $\delta = K_t/D_t$, où D_t est la provision pour amortissement du capital fixe de la comptabilité nationale. Le taux de dépréciation moyen obtenu est de 4.72%. En utilisant ce taux, la somme des valeurs observées du stock de capital multipliée par le taux de remplacement, $\delta \sum K_t$, représente le 45% de la somme de l'investissement brut, $\sum I_t$, pour la période 1951-1968. Selon les calculs de S. Kuznets l'investissement de remplacement au niveau de l'économie globale domine l'investissement d'expansion dans l'économie américaine depuis 1919. La provision pour amortissement du capital⁸ fixe de la comptabilité nationale semble sous-estimer le taux de remplacement; c'est pourquoi, après quelques

⁸ La série du capital, K_t , utilisée est celle obtenue par les professeurs P. Balestra et W. Wittmann. Le calcul se fait de la façon suivante: ils ont capitalisé les revenus produits par les groupes de biens capitaux de la comptabilité nationale au taux du marché pour l'année 1958, à partir de cette année de base, ils ont retranché l'investissement net à prix constants pour les périodes antérieures et ajouté l'investissement net pour les périodes postérieures à 1958.

tâtonnements, on a retenu le taux de 7⁰/₀ pour la présentation des tableaux I et III. Dans ce cas, $\delta \sum K_t$ représente le 66⁰/₀ de la somme de l'investissement brut. Il faut noter que l'on n'arrive pas à avancer des arguments décisifs pour le taux de dépréciation de 7⁰/₀. En revanche, il est certain que le taux de dépréciation de la comptabilité nationale est davantage résiduel que réel.

Pour sonder la validité de la théorie du remplacement, on peut faire deux test sur δ .

Le premier test est celui d'un taux de remplacement nul. Ce test est rejeté, au seuil de confiance de 5⁰/₀, dans les deux versions du modèle. Cela signifie évidemment que l'hypothèse de remplacement retenue dans le modèle n'est pas en contradiction avec le comportement réel.

Le deuxième test, plus subtile, est basé sur la comparaison entre le taux de dépréciation déterminé a priori et le taux de dépréciation obtenu par le modèle. L'hypothèse d'une différence nulle entre ces deux taux est acceptée dans la version contrainte du modèle, au seuil de confiance de 5⁰/₀; par contre, elle doit être rejetée, au même seuil de confiance, dans le modèle non-contraint.

Finalement, on peut estimer la valeur du paramètre mesurant l'élasticité de l'output par rapport au capital, $\hat{\alpha}$, à partir de l'équation (24). L'élasticité calculée pour la régression 1 non-contrainte donne un $\hat{\alpha} = 0.04$ et la même régression contrainte révèle un $\hat{\alpha} = 0.07$. Le biais vers le bas dans l'estimation est dû vraisemblablement aux erreurs dans la mesure du changement de stock de capital désiré.

II. Etude de la structure temporelle de l'investissement

Etudions certaines implications dues aux changements dans les conditions du marché. A partir de la fonction d'investissement complète (19) et étant donné la relation fondamentale qui lie le stock de capital et l'investissement brut:

$K_t = I_t + (1-\delta)K_{t-1}$, on peut dériver une autre forme complète de la théorie de l'investissement:

$$\begin{aligned} I_t &= [1 - (1-\delta)L] w(L) K_t^* \\ \nu &= 0(L) K_t^* \end{aligned} \quad (27)$$

où $\nu(L) = [1 - (1-\delta)L] w(L)$, νL est une série de puissances dans l'opérateur de retard L . La réponse à court terme de l'investissement brut à un changement dans le stock de capital désiré dépend du temps écoulé après le

changement dans les conditions du marché. Pour trouver la réponse de l'investissement à un changement persistant durant τ périodes, on suppose que :

$$K_t^* = K_{t-s}^* \quad s = 1, 2, 3, \dots, \tau$$

c'est-à-dire que la demande pour le capital désiré reste constante durant τ périodes, commençant $\tau-1$ périodes avant la période courante. Ainsi, la théorie de l'investissement peut s'écrire :

$$I_t = \sum_{s=1}^{\tau} \nu_s K_{t-s}^* + \sum_{s=\tau+1}^{\infty} \nu_s K_{t-s}^* = z_{\tau} K_t^* + \sum_{s=\tau+1}^{\infty} \nu_s K_{t-s}^* \quad (28)$$

où $\{z_{\tau}\}$ est la suite cumulée des coefficients $\gamma(L)^9$. On appelle cette suite cumulée la structure temporelle de la réponse des dépenses d'investissement brut à un changement dans le stock de capital désiré. Par contre, $\{w_{\tau}\}$ détermine la forme de réaction de l'investissement net. La limite de z_{τ} est simplement δ , c'est-à-dire qu'un changement dans le stock de capital désiré persistant indéfiniment produit un accroissement de l'investissement brut égal à δ fois le changement dans le stock de capital désiré. Il s'agit donc du changement dans l'investissement de remplacement né du changement dans le stock de capital. On appellera cet investissement de remplacement la réponse à long terme de l'investissement causée par une variation du stock de capital désiré.

Le tableau IV présente trois formes de structure temporelle des réponses pour le polynôme, $w(L)$, de l'investissement net ainsi que pour la suite définie ci-dessus, $\{z_{\tau}\}$. Le premier polynôme est celui du modèle de *Jorgenson* pour la régression 1 non-contrainte. La distribution n'est pas monotone et fait apparaître une concentration de la réaction dans les trois premières périodes. Le retard moyen est de 19 mois. Si l'on compare cette distribution avec la distribution de Pascal pour la régression 1 contrainte, on remarque que la réaction est plus amortie et que le retard moyen est de 4 ans. De plus, on donne la

* On a défini
$$\begin{aligned} \nu(L) &= [1 - (1-\delta)L] w(L) \\ &= w_{\tau} - (1-\delta) w_{\tau-1} \end{aligned}$$

et
$$z_{\tau} = \sum_{s=1}^{\tau} \nu_s.$$
 Mais, on peut aussi poser :

$$z_t = w_{\tau} + \delta \sum_{s=1}^{\tau-1} w_{\tau-s}; \text{ lorsque } \tau \rightarrow \infty, w_{\tau} \rightarrow 0 \quad \text{et}$$

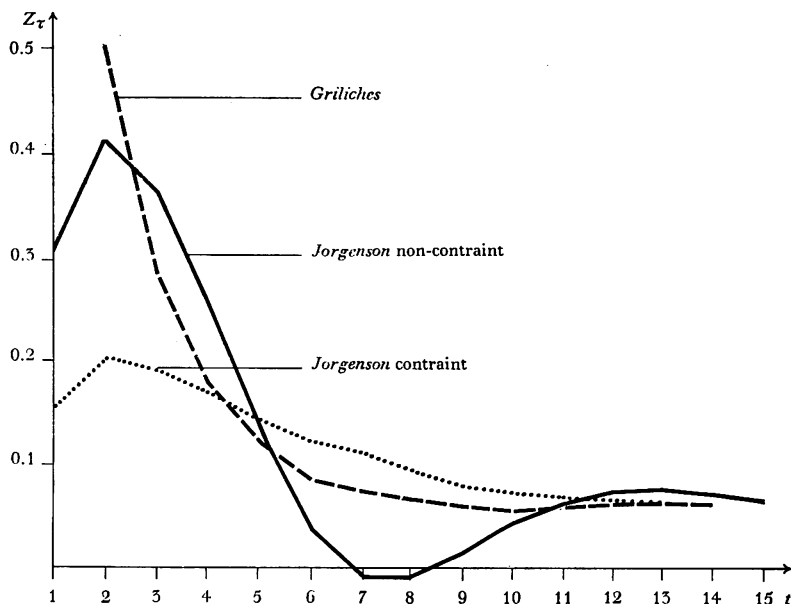
$$\sum_{s=1}^{\tau-1} w_{\tau-s} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad z_{\tau} \rightarrow \delta = 0.07.$$

forme de distribution à retards échelonnés géométrique obtenue par l'estimation du modèle de *Grunfeld-Griliches* [2]. La fonction d'investissement brut estimée est:

$$I_t = f(X_{t-1}) + (\delta - \gamma) K_t - w_1 IN_{t-1} \quad (29)$$

où X_{t-1} est un vecteur de variables explicatives retardées d'une période. Les variables retenues sont le taux d'intérêt, la production intérieure brute et l'indice des actions suisses.

Afin d'avoir une approche visuelle immédiate de ces formes de réaction, on a reproduit sur la figure I, les trois polynômes $\{z_\tau\}$.



Lors de notre discussion des formes de réaction des dépenses d'investissement brut résultant d'un changement dans le stock de capital désiré, on supposait celui-là constant durant τ périodes. Déterminons maintenant les effets d'un changement dans les variables explicatives sur le stock de capital désiré. On va considérer les effets dans les changements des variables exogènes isolément comme on l'a supposé pour calculer les formes de réaction. La réponse à court terme de l'investissement brut aux variations des conditions déterminant le stock de capital désiré est le produit de la réaction à court terme, $\{z_\tau\}$, de l'investissement brut par la variation de la demande en biens capitaux résultant d'un changement dans les conditions qui la déterminent. Par exem-

Tableau IV. Estimation des formes de réaction de l'investissement

Retards	Effets sur l'investis. net $w(L)$			Effets sur l'investis. brut $z(L)$		
	Jorgenson ^b		Griliches	Jorgenson ^b		Griliches
	non-contraint	contraint		non-contraint	contraint	
1	0.309	0.160	0.000	0.309	0.160	0.000
2	0.391	0.190	0.504	0.415	0.201	0.504
3	0.318	0.170	0.250	0.367	0.194	0.285
4	0.177	0.156	0.124	0.248	0.172	0.176
5	0.042	0.102	0.061	0.125	0.148	0.123
6	-0.049	0.074	0.050	0.057	0.127	0.095
7	-0.086	0.052	0.015	-0.005	0.110	0.082
8	-0.081	0.036	0.007	-0.004	0.098	0.075
9	-0.053	0.025	0.004	0.018	0.092	0.072
10	-0.020	0.017	0.002	0.048	0.086	0.071
11	0.005	0.012	0.001	0.061	0.082	0.070
12	0.017	0.008	—	0.083	0.078	0.070
13	0.019	0.005	—	0.087	0.075	0.070
14	0.015	0.003	—	0.085	0.075	0.070
15	0.007	—	—	0.077	—	0.070
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
	0.000	0.000	0.000	0.070	0.070	0.070
Retard moyen ^c	19 mois	4 ans	2 ans			

^a Le polynôme $w(L)$ est développé selon la formule $w_t = t_1 w_{t-1} + t_2 w_{t-2}$ où t_1 et t_2 sont les coefficients de IN_{t-1} et IN_{t-2} respectivement et le premier retard est calculé par l'expression $w_1 = 1 - t_1 - t_2$

$$^b z_t = w_t + 0.07 \sum_{s=1}^{t-1} w_{t-s}$$

^c Le retard moyen pour un polynôme du 2^e degré résulte de la relation

$$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i w_i}{\sum_{i=1}^{\infty} w_i}, \text{ voir à ce sujet [1].}$$

ple, l'effet sur l'investissement brut pour la période τ dû à une variation du taux d'intérêt est :

$$\frac{\delta I}{\delta r} = \frac{\delta I}{\delta K^*} \frac{\delta K^*}{\delta r} = z_\tau \frac{\delta K^*}{\delta r}$$

$$\frac{\delta K^*}{\delta r} = -\alpha \frac{pQ}{c} \frac{q}{c} = -K^* \frac{[\delta + r]}{[\delta + r]}.$$

On aurait aussi pu calculer la sensibilité de l'investissement brut à une variation du taux d'intérêt en différenciant simplement la fonction (23) par rapport au taux d'intérêt.

Le tableau V présente la réaction de l'investissement brut pour respectivement une variation de 1% du taux d'intérêt et de 1 million du produit intérieur brut.

On voit ainsi clairement l'interprétation du polynôme $\{z_\tau\}$, il exprime la proportion de la variation du stock de capital désiré qui se réalise dans une période postérieure, en pensant toutefois au fait qu'à partir de la deuxième période, il y a dans l'investissement brut l'investissement de remplacement né de l'accroissement du stock de capital dans la période antérieure et ainsi de suite. Cet investissement de remplacement devient le principal élément après 4 périodes.

Tableau V. Approximation des effets* sur l'investissement brut pour l'estimation non-contraite

Période	Variation du taux d'int.	Variation de la production
	ΔI_τ^B par rapport $\frac{\delta I}{\delta r} = z_\tau \frac{\delta K^*}{\delta r}$ à t_0	ΔI_τ^B par rapport $\frac{\delta I}{\delta Q} = z_\tau \frac{\delta K^*}{\delta Q}$ à t_0
1	388 $\cong$ 0.309(1265)	107 = 0.309(349)
2	520 $\cong$ 0.415(1265)	144 = 0.413(349)
3	464 = 0.367(1265)	128 = 0.367(349)
long terme	$\Delta K^* = 0.07(1265) = 88$	$\Delta K^* = 0.07(349) = 24.5$

* Les effets sont donnés en milliers de francs constants, ces valeurs sont calculées d'après les moyennes des variables exogènes.

Calculons finalement les élasticités de l'investissement brut par rapport aux différentes variables exogènes du modèle. En utilisant la fonction (28) l'élasticité en longue période par rapport au taux d'intérêt est égal à:

$$\varepsilon(I \rightarrow r) = \frac{\delta I}{\delta r} \frac{r}{I} = z_r \frac{\delta K^*}{\delta r} \frac{r}{I} = -z_r \frac{K^*}{[\delta + r]} \frac{r}{I} = -\frac{r}{[\delta + r]}.$$

Les autres élasticités de longue période présentées dans le tableau VI sont déterminées par la structure du modèle. Par exemple: l'élasticité par rapport au prix des biens d'investissement est:

$$\varepsilon(I \rightarrow q) = \frac{\delta I}{\delta q} \frac{q}{I} = z_r \frac{\delta K^*}{\delta q} \frac{q}{I} = -z_r \frac{K^*}{q} \frac{q}{I} = -1$$

Tableau VI. Elasticité de l'investissement brut

par rapport à	
r^*	-0.55
p	1
q	-1
Q	1

* Calculé d'après le taux d'intérêt moyen 1951-1968.

Conclusion

En appliquant le modèle de *Jorgenson* basé sur la théorie néoclassique de l'accumulation optimale du capital aux données de la Suisse, on a pu confronter la théorie avec les éléments empiriques de l'investissement. On signalera en premier lieu que l'on a renoncé à tester la puissance de prévision du modèle, car les données sont trop agrégées pour fournir une estimation des dépenses prévues. On observe que la détermination du stock de capital désiré est mauvaise, en raison des erreurs d'agrégation et de la sous-estimation du coût des services du capital du fait que l'on n'a pas pris en charge la structure des taxes. Pour se livrer à un travail de ce genre, il faudrait disposer de données par secteurs et d'observations trimestrielles, mais ce sont là autant de désirs que nos comptes nationaux ne peuvent satisfaire.

On peut malgré tout faire quelques observations.

Premièrement, le modèle met en évidence l'importance de la structure temporelle des effets causés par les changements de stock de capital désiré. Pour les mesures de politique conjoncturelle il est extrêmement important de connaître le chemin de la réaction. Pour l'investissement net, on remarque la concentration des effets dans les premières années. Cela concerne l'effet à court terme, mais soulignons le fait souvent ignoré que l'investissement de remplacement prime après quelques années.

Deuxièmement, l'ajustement du modèle de *Grunfeld-Griliches* montre que l'estimation du profil de réaction basée sur des données annuelles est déjà bonne avec une distribution à retards échelonnés géométrique, bien que la distribution à retards échelonnés rationnelle soit plus raffinée. On découvre tout l'intérêt qu'il y aurait à estimer une fonction d'investissement pour une firme avec des observations trimestrielles. Dans le modèle de *Jorgenson*, on remarque la primordialité du taux d'intérêt et de la production, car si les effets dus aux changements des prix de la production et des biens d'investissement sont importants, il sont opposés. A l'échelle nationale, la corrélation des deux indices de prix est voisine de un, d'où la compensation des conséquences.

D'autre part, si le taux d'intérêt est une variable exogène assez bien maîtrisée par les pouvoirs gouvernementaux, on ne peut s'empêcher de douter de la très forte interdépendance entre l'investissement brut et la production, il est difficile de découvrir le sens de la chaîne de causalité. Cependant, il faut souligner la valeur d'exemple de cette théorie de l'investissement fondée sur un ensemble de relations logiques et complètes.

Bibliographie

- [1] *Griliches Z.* : « Distributed Lags: A Survey », *Econometrica*, Vol. 35, janvier 1967, p.16-49.
- [2] *Griliches Z.* et *Wallace N.*: « The Determinants of Investment Revisited », *International Economic Review*, Vol. 6, septembre 1965, p.311-329.
- [3] *Jorgenson Dale W.*: « Capital Theory and Investment Behavior », *American Economic Review*, Vol. 53, mai 1963, p.247-259.
- [4] : « Rational Distributed Lags Functions », *Econometrica*, Vol. 34, janvier 1966, p.135-149.
- [5] : The Theory of Investment Behavior in R.Feber (ed.), « Determinants of Investment Behavior », National Bureau of Economic Research New-York, 1967, p.129-155.
- [6] *Jorgenson Dale W.* et *J. A. Stephenson*: « Investment Behavior in U.S. Manufacturing, 1947-1960 », *Econometrica*, Vol. 35, avril 1967, p.169-220.
- [7] *Solow R. M.*: « On a Family of Lag Distributions », *Econometrica*, Vol. 28, avril 1960, p.393-406.