

2. Gruppensitzungen · Séances des groupes

a) *Die Beziehungen des Operations Research zur Wirtschaftspraxis*

La recherche opérationnelle et l'économie pratique

LEITUNG: E. SOOM

Was ist mathematische Ökonomie?

Von Hans Bühlmann, Zürich

1. Einleitung

Die Mathematik steht seit der Renaissance in ständiger Wechselbeziehung mit ihrem Anwendungsgebiet par excellence, der Physik, und, damit verbunden, mit den Ingenieur- und Naturwissenschaften. Erst diesem Jahrhundert war es vorbehalten, dass sich eine solche Wechselbeziehung auch mit den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften anbahnte. Ich möchte mich heute vor allem mit dem Verhältnis der Mathematik zur Ökonomie befassen, wobei die Ökonomie im grosswirtschaftlichen Raum – also insbesondere die Nationalökonomie – im Vordergrund stehen wird – im Gegensatz zu den mikroökonomischen Problemen des einzelnen Wirtschaftsunternehmens, zu denen der Mathematiker durch die Methoden des Operations Research schon eine viel ausgeprägtere Beziehung hat.

Typisch für die Anwendung der Mathematik im ökonomischen Bereich ist der Umstand, dass im Gegensatz zur Usanz physikalischer Modellvorstellungen den Methoden der Algebra, insbesondere der linearen, vor denen der Analysis meistens der Vorzug zu geben ist. Methodisch wird dabei in der Regel von dem Begriff der Konvexität ausgiebig Gebrauch gemacht.

2. Verbale Beschreibung der Ökonomie

Wir wollen zunächst mit Worten die Elemente charakterisieren, die in einer Ökonomie von Bedeutung sind.

Dabei gibt $|v_j|$ die «Menge» des Gutes j an;

$v_j > 0$ bedeutet: das Gut j entsteht ($\rightarrow$ Angebot),

$v_j < 0$ bedeutet: das Gut j wird gebraucht ($\rightarrow$ Nachfrage).

d) Der *Agent* trägt eine Nummer i ($i = 1, 2, \dots, n$). Er wird charakterisiert durch

– seine *Möglichkeiten*: V^i bezeichnet die Gelegenheitsmenge des Agenten i (V^i ist Teilmenge aller möglichen Aktivitäten; $V^i \subset R^m$). Der Agent darf also nur Aktivitäten in der Menge V^i wählen.

– seine *Präferenz*: Die Präferenzrelation $\preceq_i$ des Agenten i sagt aus, welche von je zwei Aktivitäten der Agent i vorzieht.

Schliesslich bleibt noch

c) die *Technologie*. Sie wird ebenfalls durch eine Menge $T \subset R^m$ beschrieben mit der Bedeutung, dass nur solche Aktivitäten v^i von den Agenten i ($i = 1, 2, \dots, n$) gewählt werden können, deren Summe (Totalaktivität) in T liegt, d. h. technologisch möglich ist.

Wir können nun definieren:

Ein *Zustand der Ökonomie* ist ein n -Tupel von Aktivitäten (m -dimensionalen Vektoren) $\mathfrak{B} = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ mit

1) $v^i \in V^i$ (V^i : Möglichkeit für jeden Agenten),

2) $\sum_{i=1}^n v^i \in T$ (T : technologische Möglichkeit).

4. Optimum und Preis-Equilibrium

A. Optimum (Pareto)

Seien $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ Zustände der Ökonomie,

$\overline{\mathfrak{B}}$ ist Pareto-Optimum, falls kein $\mathfrak{B}$ existiert mit $v^i \succ_i \bar{v}^i$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$.
(In Worten: Ein Zustand ist Pareto-Optimum, falls es keinen anderen Zustand gibt, der von allen Agenten gleichzeitig bevorzugt wird.)

Es scheint einleuchtend, dass es im allgemeinen nicht ein eindeutig bestimmtes, sondern sehr viele Pareto-Optima gibt ($\rightarrow$ Menge der Pareto-Optima: S_0).

B. Preis-Equilibrium (Walras)

Bezeichne $\overline{\mathfrak{B}}$ einen Zustand der Ökonomie,
 $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ einen Preisvektor und mögen die Komponenten q_i des
 Vektors $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ Transferzahlungen darstellen. (Speziell liegt für
 $q = 0$ eine Laissez-faire-Ökonomie vor.)

Dann definieren wir:

$(\overline{\mathfrak{B}}, p, q)$ ist ein Preis-Equilibrium, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Konsumptionsbedingung:

$\bar{v}^i$ maximiert v^i bezüglich $\geq_i$ unter der Nebenbedingung $\overbrace{pv^i \leq q_i}^{\text{Budget-Ungleichung}}$.
 $\left(pv \text{ steht für } \sum_{j=1}^m p_j v_j \right)$

Jeder Konsument wählt also von den innerhalb seines Budgets liegenden
 Aktivitäten jene, die er am meisten bevorzugt.

(2) Produktionsbedingung:

$\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{v}^i$ maximiert $\underbrace{pv}_{\text{Profit}}$ für alle $v \in T$.

Die Produzenten maximieren ihren Profit innerhalb der technologischen
 Möglichkeiten.

Auch hier wird es in der Regel viele Preis-Equilibria geben ($\rightarrow$ Menge der
 Preis-Equilibria: S_E .)

5. Zusammenhänge (Edgeworth, Arrow, Debreu)

Es gelten die folgenden Zusammenhänge, die für jene, die sich mit diesen
 Begriffen erstmals beschäftigen, erstaunlich sein mögen:

- a) Jedes Preis-Equilibrium ist ein Pareto-Optimum.
- b) Unter gewissen recht allgemeinen Annahmen ist auch jedes Pareto-Optimum ein Preis-Equilibrium.

Damit ist – im Modell – der Beweis erbracht, dass eine Marktwirtschaft in
 der Lage ist, jeden vernünftigerweise wünschbaren Zustand einer Ökonomie
 herbeizuführen. Die mathematischen Ökonomen haben dadurch – wenigstens

in der vollkommenen Marktwirtschaft – den Schlusstrich unter die recht hitzige Debatte (von Mises, Hayek, Lange, Lerner) in den dreissiger und vierziger Jahren gezogen, indem sie das Funktionieren einer dezentralisierten Wirtschaftsentscheidungsstruktur bei geeigneten Preisen und Transferzahlungen nachgewiesen haben. Nicht erfasst durch diese Untersuchungen sind allerdings die in der Realität unserer Tage nicht mehr wegzudenkenden Oligopolstrukturen. Hier sind die Untersuchungen – leider – noch lange nicht soweit vorangetrieben wie für die klassische Marktwirtschaft.