

Une généralisation des notions d'élasticité de production : l'élasticité directionnelle

par Olivier de La Grandville, Genève*

Dans la théorie de la production et de la distribution, les notions d'élasticité partielle et d'élasticité d'échelle de production jouent un rôle important. Supposons par exemple qu'un processus productif soit à rendement d'échelle constant (ce qui revient à dire que l'élasticité d'échelle est égale à l'unité, ou que la fonction de production est homogène de degré 1), et que le taux de rémunération de chaque facteur soit égal à la productivité marginale de celui-ci (situation de concurrence parfaite): l'élasticité partielle de la fonction par rapport à chaque facteur indique alors la part de chaque facteur dans la rémunération totale à laquelle donne naissance le processus productif.

Nous nous proposons dans cet article de généraliser quelque peu ces notions en introduisant le concept d'élasticité directionnelle, dont l'élasticité partielle et l'élasticité d'échelle seront des cas particuliers; après en avoir montré quelques propriétés, nous procéderons à une extension de ce concept à des fonctions de $\mathbb{R}_+^n$ dans $\mathbb{R}_+^m$; nous indiquerons ensuite une interprétation géométrique de l'élasticité directionnelle dans le cas d'une fonction scalaire à deux variables, ce qui nous permettra de représenter graphiquement, comme cas particulier, le degré d'homogénéité d'une fonction. Enfin, nous appliquerons cette notion aux fonctions de production Cobb-Douglas, ACMS, et à un type de fonction à élasticité de substitution variable.

I. Définition de l'élasticité directionnelle

Soit une fonction de production à n variables

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

définie pour tout $x_i \geq 0$ et continuellement dérivable pour tout $x_i > 0$.

Sa différentielle au point $\tilde{x}_0$ est:

$$dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}_0) dx_i.$$

Donnons à chaque variable x_i un accroissement dx_i tel que:

$$\frac{dx_i}{x_i} = a_i \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(On suppose que x_i et $f(\tilde{x}_0)$ sont différents de zéro; $\frac{d\lambda}{\lambda}$ est un accroissement relatif arbitraire). On aura:

* Département d'économie politique, Université de Genève.

$$dy = \frac{d\lambda}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x}_0) a_i x_i$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dy}{f(\vec{x}_0)} = \frac{d\lambda}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x}_0) a_i \frac{x_i}{y}.$$

Nous définirons l'élasticité directionnelle de production de la fonction $y = f(\vec{x})$ au point $\vec{x} = \vec{x}_0$ par l'expression

$$E_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \frac{dy}{y} / \frac{d\lambda}{\lambda} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x}_0) \frac{x_i}{y}.$$

En tout point de la surface (hypersurface) représentative de la fonction de production, l'élasticité directionnelle sera égale à l'accroissement relatif de la cote du plan (hyperplan) tangent rapporté à l'accroissement relatif $\frac{d\lambda}{\lambda}$. Elle représente l'accroissement relatif de la fonction (en approximation linéaire) rapporté à l'accroissement relatif précité.

L'élasticité partielle de production de la fonction par rapport au facteur i au point $(\vec{x}_0)$ étant définie par $\frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x}_0) \frac{x_i^0}{f(\vec{x}_0)}$, et notée de façon abrégée

$$e_i = f_i \frac{x_i}{y},$$

l'élasticité directionnelle est égale à

$$E_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^n a_i e_i = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{e}.$$

Elle est égale à la somme des élasticités partielles pondérée par les coefficients directeurs a_i , c'est-à-dire au produit scalaire du vecteur des coefficients directeurs $\hat{\vec{a}} = (a_1, \dots, a_n)$ et du vecteur des élasticités partielles $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)$.

Si, par exemple, une fonction de production $y = f(x_1, x_2)$ admet des élasticités partielles de production égales respectivement à 0,7 et 0,4 en un point donné, et si l'on donne à x_1 et à x_2 des accroissements relatifs égaux respectivement à 1,2% et 0,6%, l'accroissement relatif de la fonction (en approximation linéaire) sera :

$$\frac{dy}{y} = (1,2\%)0,7 + (0,6\%)0,4 = 1,08\%$$

et l'élasticité directionnelle sera égale à 1,08 en ce point.

On pourra aussi écrire l'élasticité directionnelle de la manière suivante, en utilisant le vecteur gradient :

$$E_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \frac{1}{f(\vec{x}_0)} \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \hat{\vec{a}} \vec{x}_0.$$

($\hat{\vec{a}}$ désigne la matrice diagonale des coefficients a_i).

Nous avons appelé le produit scalaire $\hat{\vec{a}} \cdot \vec{e}$ «élasticité directionnelle», par analogie avec la notion de dérivée directionnelle. Nous justifierons cette désignation en définissant l'élasticité directionnelle de la manière suivante: soit $f(\vec{x})$ une

fonction de n variables $(x_1, \dots, x_n)$ ayant les propriétés définies précédemment, et $\hat{\mathbf{a}}$ un vecteur de direction donné $(a_1, \dots, a_n)$; nous dirons qu'à tout $\hat{\mathbf{x}}_0$ correspond un nombre, appelé élasticité directionnelle et noté $E_{\hat{\mathbf{a}}} f(\hat{\mathbf{x}}_0)$, égal à la limite suivante (si elle existe):

$$E_{\hat{\mathbf{a}}} f(\hat{\mathbf{x}}_0) = \frac{1}{f(\hat{\mathbf{x}}_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\hat{\mathbf{x}}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{x}}_0) - f(\hat{\mathbf{x}}_0)}{h}$$

où h est un accroissement *relatif*.

On peut montrer que cette élasticité directionnelle est égale au produit scalaire $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{e}}$ en utilisant le théorème de la valeur moyenne appliqué aux fonctions à n variables; on a:

$$f(\hat{\mathbf{x}}_1) - f(\hat{\mathbf{x}}_0) = \text{grad } f(\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_0),$$

le vecteur $\hat{\mathbf{z}}$ étant tel que

$$\hat{\mathbf{z}} = (1-\theta)\hat{\mathbf{x}}_0 + \theta\hat{\mathbf{x}}_1, \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Par conséquent, nous aurons:

$$\begin{aligned} E_{\hat{\mathbf{a}}} f(\hat{\mathbf{x}}_0) &= \frac{1}{f(\hat{\mathbf{x}}_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{grad } f(\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_0)}{h} \\ &= \frac{1}{f(\hat{\mathbf{x}}_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{grad } f(\hat{\mathbf{z}}) \cdot h\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{x}}_0}{h} \\ &= \frac{1}{f(\hat{\mathbf{x}}_0)} \text{grad } f(\hat{\mathbf{x}}_0) \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Pour un vecteur $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ normé, il est évident que l'élasticité directionnelle est maximale lorsque le vecteur $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ et le vecteur gradient sont collinéaires et de même sens.¹

¹ En revanche, si l'on norme le vecteur $\hat{\mathbf{a}}$, l'élasticité directionnelle est maximale lorsque le vecteur $\hat{\mathbf{a}}$ et le vecteur des élasticité partielles sont collinéaires et de même sens. On peut le vérifier en utilisant une des formes de l'inégalité de Schwartz, selon laquelle la valeur absolue du produit scalaire de deux vecteurs est inférieure ou égale au produit de leurs normes: on a:

$$\|\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{e}}\| \leq \|\hat{\mathbf{a}}\| \|\hat{\mathbf{e}}\|$$

et par ailleurs:

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{e}} \leq \|\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{e}}\| \leq \|\hat{\mathbf{a}}\| \|\hat{\mathbf{e}}\| = \|\hat{\mathbf{e}}\|.$$

Nous voyons que $\|\hat{\mathbf{e}}\|$ constitue une borne supérieure à toutes les élasticités directionnelles $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{e}}$. En supposant $\|\hat{\mathbf{e}}\| \neq 0$, cette borne supérieure est égale à:

$$\|\hat{\mathbf{e}}\| = \hat{\mathbf{e}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{e}}}{\|\hat{\mathbf{e}}\|}$$

qui est l'élasticité directionnelle dans la direction du vecteur $\frac{\hat{\mathbf{e}}}{\|\hat{\mathbf{e}}\|}$. Ainsi, on voit que l'élasticité directionnelle atteint sa valeur maximale $\|\hat{\mathbf{e}}\|$ pour $\hat{\mathbf{a}}$ normé lorsque le vecteur directionnel est égal à $\frac{\hat{\mathbf{e}}}{\|\hat{\mathbf{e}}\|}$, c'est-à-dire lorsque $\hat{\mathbf{a}}$ et $\hat{\mathbf{e}}$ sont collinéaires et ont le même sens.

On retrouve naturellement la notion d'élasticité partielle de la fonction par rapport à x_i si tous les coefficients directeurs sont nuls sauf le coefficient a_i , égal à l'unité; on retrouve également comme cas particulier l'élasticité d'échelle (notée habituellement e_λ) si tous les coefficients directeurs sont égaux à l'unité, et le théorème de Wicksell-Johnson selon lequel l'élasticité d'échelle est égale à la somme des élasticités partielles: $e_\lambda = \sum_{i=1}^n e_i$.

Dans le cas d'une fonction homogène, l'élasticité d'échelle ainsi définie est égale au degré d'homogénéité de cette fonction. On peut vérifier ceci immédiatement en appliquant le théorème d'Euler, ou encore en considérant, avec $t^k f(\vec{x}) = f(t\vec{x})$, la limite

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_i} \frac{x_i}{y} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^k - 1}{t - 1} = k.$$

Le degré d'homogénéité d'une fonction est donc égal à l'élasticité directionnelle lorsque les coefficients a_i sont égaux à l'unité. Si l'on voulait exprimer l'élasticité directionnelle en fonction du degré d'homogénéité k , on pourrait écrire, par exemple:

$$E_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^n e_i (a_i - a_j) + a_j k, \quad i \neq j.$$

II. Propriétés de l'élasticité directionnelle

Attachons-nous maintenant à indiquer quelques propriétés de l'élasticité directionnelle.

a) Elasticité directionnelle de la somme et de la différence de deux fonctions

Soient $f(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$ deux fonctions scalaires à n variables. L'élasticité directionnelle de la somme $f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ au point $\vec{x}_0$, que nous noterons $E_{\vec{a}}(f+g)(\vec{x}_0) = E_{\vec{a}} \{f(\vec{x}_0) + g(\vec{x}_0)\} = E_{\vec{a}}(f+g)$, sera égale à une combinaison linéaire convexe des élasticités directionnelles des fonctions $f(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$ au point $\vec{x}_0$, en l'occurrence à la moyenne de ces élasticités, pondérée par les valeurs de $f(\vec{x})$ et de $g(\vec{x})$ en ce point. On aura, en tout point $\vec{x}_0$:

$$E_{\vec{a}}(f \pm g)(\vec{x}_0) = \frac{f(\vec{x}_0) E_{\vec{a}} f(\vec{x}_0) \pm g(\vec{x}_0) E_{\vec{a}} g(\vec{x}_0)}{f(\vec{x}_0) \pm g(\vec{x}_0)}$$

On peut montrer ceci aisément de diverses manières. L'une d'elles consiste à utiliser la définition que nous avons donnée de l'élasticité directionnelle:

$$\begin{aligned}
E_{\hat{a}}(f+g)(\hat{x}_0) &= \frac{1}{(f+g)(\hat{x}_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0) + g(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0) - f(\hat{x}_0) - g(\hat{x}_0)}{h} \\
&= \frac{1}{(f+g)(\hat{x}_0)} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0) - f(\hat{x}_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0) - g(\hat{x}_0)}{h} \right\} \\
&= \frac{1}{(f+g)(\hat{x}_0)} \left[f(\hat{x}_0) E_{\hat{a}} f(\hat{x}_0) + g(\hat{x}_0) E_{\hat{a}} g(\hat{x}_0) \right].
\end{aligned}$$

En ce qui concerne l'élasticité directionnelle de la différence de deux fonctions, le résultat est immédiat également.

Ces propriétés peuvent être généralisées à un nombre quelconque m de fonctions scalaires à n variables.

b) Elasticité directionnelle du produit et du quotient de deux fonctions

On peut montrer d'une manière analogue que l'élasticité directionnelle du produit (quotient) de deux fonctions scalaires à n variables est égale à la somme (différence) des élasticité directionnelles de chacune de ces fonctions.

$$E_{\hat{a}}(fg)(\hat{x}_0) = E_{\hat{a}}f(\hat{x}_0) + E_{\hat{a}}g(\hat{x}_0)$$

$$E_{\hat{a}}\left(\frac{f}{g}\right)(\hat{x}_0) = E_{\hat{a}}f(\hat{x}_0) - E_{\hat{a}}g(\hat{x}_0).$$

Si l'on considère le produit de deux fonctions, on aura :

$$\begin{aligned}
E_{\hat{a}}(fg)(\hat{x}_0) &= \frac{1}{f(\hat{x}_0)g(\hat{x}_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0)g(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0) - f(\hat{x}_0)g(\hat{x}_0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0) - f(\hat{x}_0)] g(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0)}{f(\hat{x}_0)g(\hat{x}_0)h} + \frac{f(\hat{x}_0)[g(\hat{x}_0 + h\hat{a}\hat{x}_0) - g(\hat{x}_0)]}{f(\hat{x}_0)g(\hat{x}_0)h} \right\}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$E_{\hat{a}}(fg)(\hat{x}_0) = E_{\hat{a}}f(\hat{x}_0) + E_{\hat{a}}g(\hat{x}_0).$$

En ce qui concerne l'élasticité directionnelle du quotient de deux fonctions, nous aurons :

$$\begin{aligned}
E_{\hat{\mathbf{a}}} \left(\frac{f}{g} \right) (\vec{x}_0) &= \frac{g(\vec{x}_0)}{f(\vec{x}_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{f(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0)}{g(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0)} - \frac{f(\vec{x}_0)}{g(\vec{x}_0)} \right] \right\} \\
&= \frac{g(\vec{x}_0)}{f(\vec{x}_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0)g(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0)}{hg(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0)g(\vec{x}_0)} \right\} \\
&= \frac{g(\vec{x}_0)}{f(\vec{x}_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)]g(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)[g(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0) - g(\vec{x}_0)]}{hg(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0)g(\vec{x}_0)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{g(\vec{x}_0)[f(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0)]}{f(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0)} - \frac{g(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0) - g(\vec{x}_0)}{g(\vec{x}_0 + h\hat{\mathbf{a}}\vec{x}_0)} \right] \right\} \\
&= E_{\hat{\mathbf{a}}} f(\vec{x}_0) - E_{\hat{\mathbf{a}}} g(\vec{x}_0)
\end{aligned}$$

On en déduira par conséquent que l'élasticité directionnelle de l'inverse d'une fonction est égale à la valeur opposée de l'élasticité directionnelle de cette fonction.

Comme précédemment, on peut généraliser sans difficulté ces résultats dans le cas de m fonctions scalaires à n variables.

c) Elasticité directionnelle de fonctions composées (fonctions de fonctions)

Soit $f(\vec{x})$ une fonction scalaire de n variables ; supposons que chaque variable x_i soit fonction de m variables $\vec{t} = t_1, \dots, t_m$ et possède les mêmes propriétés de différentiabilité que la fonction f . On peut montrer aisément (en utilisant par exemple le théorème de Cauchy relatif à la différentielle d'une fonction composée) que l'élasticité directionnelle de la fonction $f(\vec{x})$ sera égale au produit scalaire du vecteur des élasticités partielles de $f(\vec{x})$ par rapport à $\vec{x}$ (que nous avons noté $\vec{e}$) et du vecteur des élasticité directionnelles des fonctions $\vec{x}$ (que nous noterons $\vec{E}_{\hat{\mathbf{a}}} \{ \vec{x}(\vec{t}_0) \} = \{ E_{\hat{\mathbf{a}}} x_1(\vec{t}_0), E_{\hat{\mathbf{a}}} x_2(\vec{t}_0), \dots, E_{\hat{\mathbf{a}}} x_n(\vec{t}_0) \}$).

On aura :

$$E_{\hat{\mathbf{a}}} f(\vec{t}_0) = \vec{e}^T \cdot \vec{E}_{\hat{\mathbf{a}}} \{ \vec{x}(\vec{t}_0) \}.$$

III. Extension du concept d'élasticité directionnelle à des fonctions de $\mathbb{R}_+^n$ dans $\mathbb{R}_+^{m,2}$

Soit une fonction

$$y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^m$$

dont chaque élément possède les mêmes propriétés de différentiabilité que celles qui ont été définies précédemment.

Nous définirons le vecteur des élasticités directionnelles d'ordre m , noté $\vec{E}_a f(x)$, par l'expression :

$$\vec{E}_a f(x) = \varepsilon [y/x^T] \vec{a}^T$$

dans laquelle $\varepsilon [y/x^T]$ représente la matrice des élasticités partielles du vecteur y ; cette matrice, d'ordre m, n , est définie par :

$$\varepsilon [y/x^T] = \hat{y}^{-1} \frac{\partial y}{\partial x^T} \hat{x}^3.$$

On peut déterminer le vecteur des élasticités directionnelles d'un vecteur y dont les composantes sont la somme, ou le produit, ou le quotient de fonctions de x , ou enfin des fonctions composées de x en procédant de plusieurs façons: soit par simple extension des propriétés indiquées précédemment, soit en utilisant les propriétés de la matrice $\varepsilon [y/x^T]$.

Dans le cas de fonctions composées, on a, avec :

$$y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^m, x = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^p$$

$$\vec{E}_a f(t) = \varepsilon [y/x^T] \varepsilon [x/t^T] \vec{a}^T = \varepsilon [y/x^T] \vec{E}_a x(t).$$

Le vecteur des élasticités directionnelles de y sera donc égal au produit de la matrice des élasticités partielles de y par rapport à x , par le vecteur des élasticités directionnelles de x par rapport à t .

Si nous considérons un vecteur dont les composantes sont la somme de r fonctions, nous aurons, avec

$$y = \sum_{h=1}^r y_h, \quad y_h = f_h(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^m$$

$$\vec{E}_a y = \hat{y}^{-1} \sum_{h=1}^r \hat{y}_h \vec{E}_a y_h.$$

² $\mathbb{R}_+^n$ et $\mathbb{R}_+^m$ désignent respectivement les ensembles de vecteurs à n et m composantes réelles strictement positives. Dans le paragraphe III, les vecteurs $\vec{y}, \vec{x}, \vec{t}, \vec{\varphi}, \vec{\psi}$ seront notés y, x, t, φ, ψ afin de simplifier l'écriture.

³ Le lecteur trouvera les propriétés de cette matrice des élasticités partielles dans l'ouvrage du professeur Luigi Solari: Théorie des choix et fonctions de consommation semi-agrégées - Modèles statiques, Librairie Droz, Genève, 1971.

Le vecteur des élasticités directionnelles d'une somme de vecteurs est donc une combinaison linéaire convexe de leurs vecteurs d'élasticités directionnelles.

Enfin, si l'on envisage un vecteur dont chaque composante est le produit de fonctions,

$$\text{soit } y = \hat{\varphi}(x) \psi(x) = \hat{\varphi}(x) \varphi(x), y \in \mathbb{R}_+^m, \varphi \in \mathbb{R}_+^m, \psi \in \mathbb{R}_+^m, x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$\begin{aligned} \text{on aura} \quad \dot{E}_{\hat{a}} y &= \dot{E}_{\hat{a}} [\hat{\varphi}(x) \psi(x)] = \varepsilon [\hat{\varphi} \psi / x^T] \hat{a}^T \\ &= \{ \varepsilon [\varphi / x^T] + \varepsilon [\psi / x^T] \} \hat{a}^T \\ &= \dot{E}_{\hat{a}} \varphi(x) + \dot{E}_{\hat{a}} \psi(x). \end{aligned}$$

De même, si les composantes de y sont le quotient de deux fonctions, on aura, avec

$$\begin{aligned} y &= \hat{\psi}^{-1}(x) \varphi(x), y \in \mathbb{R}_+^m, \varphi \in \mathbb{R}_+^m, \psi \in \mathbb{R}_+^m, x \in \mathbb{R}_+^n \\ \dot{E}_{\hat{a}} y &= \{ \varepsilon [\varphi / x^T] - \varepsilon [\psi / x^T] \} \hat{a}^T \\ &= \dot{E}_{\hat{a}} \varphi(x) - \dot{E}_{\hat{a}} \psi(x). \end{aligned}$$

Le vecteur des élasticités directionnelles d'un vecteur y dont chaque composante est le produit (le quotient) de fonctions, est donc égal à la somme (la différence) des vecteurs des élasticités directionnelles de ces fonctions.

IV. Interprétation géométrique de l'élasticité directionnelle

La figure 1 représente une fonction de production à deux variables définie pour x_1 et x_2 positifs ou nuls et continuellement dérivable en tous ses points. Au point (x_1^0, x_2^0) , les élasticités partielles de production sont, en notation abrégée, respectivement:

$$e_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{x_1^0}{y^0} = \frac{y^0}{\alpha} \frac{x_1^0}{y^0} = \frac{x_1^0}{\alpha}$$

$$e_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{x_2^0}{y^0} = \frac{y^0}{\beta} \frac{x_2^0}{y^0} = \frac{x_2^0}{\beta}$$

En supposant que a_2 est supérieur à a_1 (le cas $a_2 < a_1$ serait tout à fait symétrique), l'élasticité directionnelle est égale à:

$$E_{\hat{a}} f(\hat{x}_0) = \frac{dy}{y} / \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dy}{y} \frac{x_2}{dx_2} a_2 = \frac{\rho}{\mu} \frac{g}{\rho} a_2 = a_2 \frac{g}{\mu}$$

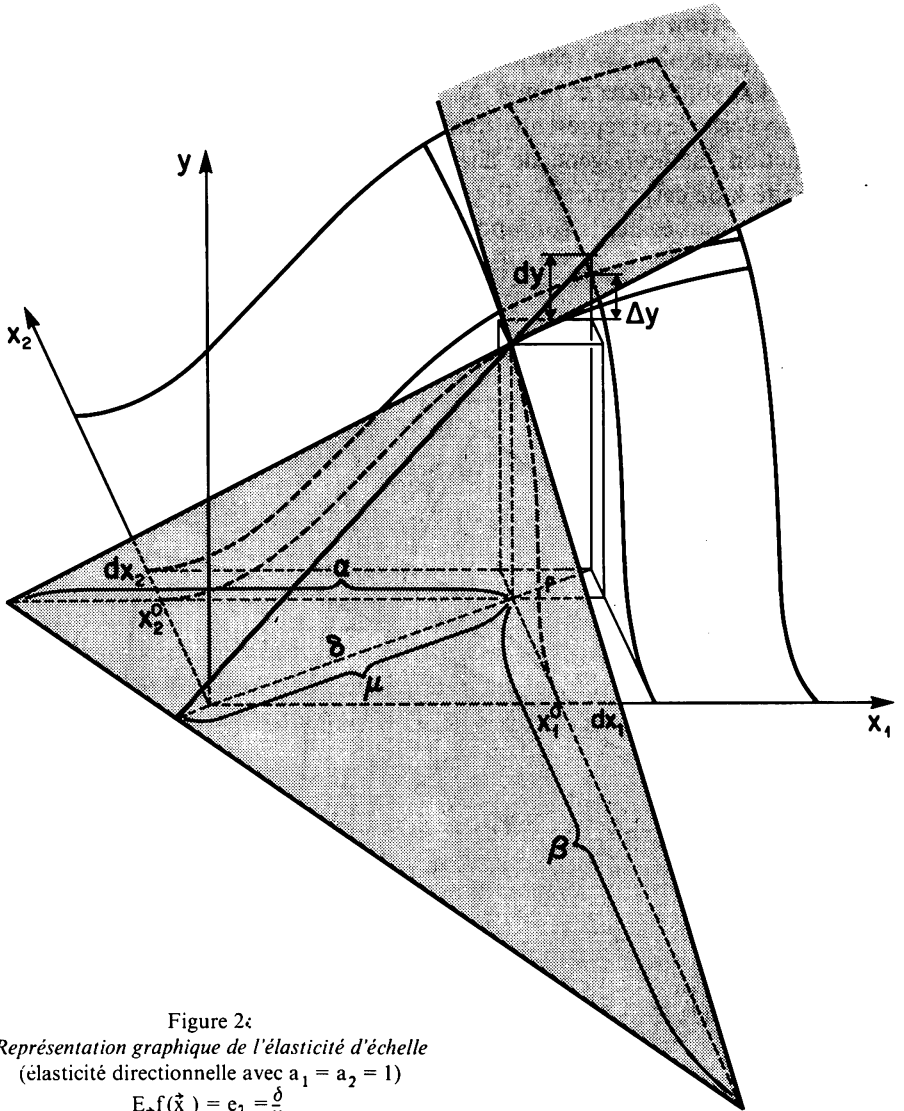


Figure 2:
Représentation graphique de l'élasticité d'échelle
(élasticité directionnelle avec $a_1 = a_2 = 1$)

$$E_{\lambda} f(\vec{x}_0) = e_{\lambda} = \frac{\delta}{\mu}$$

V. Application aux fonctions de type Cobb-Douglas, ACMS et VES

Avec une fonction du type Cobb-Douglas de la forme $y = AK^\alpha L^\beta$, homogène de degré $\alpha + \beta$, l'élasticité directionnelle sera $E_{\hat{y}} f(K, L) = a_1 \alpha + a_2 \beta$ ⁴. Si la fonction Cobb-Douglas est homogène de degré 1, l'élasticité directionnelle est égale à la moyenne des coefficients directeurs, pondérée par les valeurs des élasticités partielles.

Dans le cas d'une fonction à élasticité de substitution constante, homogène de degré μ (de la forme $y = \gamma [\delta K^{-\varrho} + (1-\delta) L^{-\varrho}]^{-\mu/\varrho}$), l'élasticité directionnelle est :

$$E_{\hat{y}} f(K, L) = \mu \left(\frac{y}{\gamma} \right)^{\varrho/\mu} [a_1 \delta K^{-\varrho} + a_2 (1-\delta) L^{-\varrho}].$$

Parmi les fonctions de production à élasticité de substitution variable avec le rapport capital-travail, une fonction particulièrement intéressante a été introduite par T. de Biolley et J. H. P. Paelinck⁵ ; elle généralise les fonctions Cobb-Douglas et CES homogènes de degré 1 ; son expression est :

$$\log y = \eta - \frac{1}{\theta} \log [\alpha K^{-\theta} + \alpha^* L^{-\theta}] - \Phi \left(\frac{L}{K} \right), \quad \alpha^* = 1 - \alpha \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

La fonction $\Phi \left(\frac{L}{K} \right)$ est choisie sous forme d'une fonction puissance

$$\left(\Phi \left(\frac{L}{K} \right) = \gamma \left(\frac{L}{K} \right)^\beta \right),$$

condition suffisante pour que y soit homogène de degré 1.

Dans ce cas, l'élasticité directionnelle est :

$$E_{\hat{y}} f(K, L) = a_1 \left[\frac{\alpha^* L^{-\theta}}{\alpha K^{-\theta} + \alpha^* L^{-\theta}} - \gamma \beta \left(\frac{L}{K} \right)^\beta \right] + a_2 \left[\frac{\alpha K^{-\theta}}{\alpha K^{-\theta} + \alpha^* L^{-\theta}} + \gamma \beta \left(\frac{L}{K} \right)^\beta \right].$$

Examinons enfin la relation existant entre l'élasticité directionnelle d'une fonction de production et le rendement moyen de chaque facteur.

Si nous considérons le rapport de l'accroissement relatif du rendement moyen du facteur rapporté à l'accroissement $\frac{d\lambda}{\lambda}$, c'est-à-dire l'élasticité directionnelle du rendement moyen, nous aurons (en appliquant une des propriétés que nous avons indiquées dans le paragraphe II) :

$$E_{\hat{y}} \left\{ \frac{f(\hat{x})}{\hat{x}_i} \right\} = E_{\hat{y}} f(\hat{x}) - E_{\hat{y}} x_i = E_{\hat{y}} f(\hat{x}) - a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En conséquence, nous en déduisons que pour tout facteur i , le rendement moyen de ce facteur sera croissant, constant ou décroissant selon que l'élasticité directionnelle de la fonction de production est supérieure, égale ou inférieure au coefficient a_i .

⁴ Dans ce qui suit, les symboles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho, \mu$ sont indépendants des grandeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho, \mu$ utilisées précédemment.

⁵ T. de Biolley et J. H. P. Paelinck, « Une famille de fonctions de production à élasticités de substitution variables ou constantes », *Revue d'économie politique*, N° 1, janvier/février 1972.

Conclusion

Le domaine d'application de ce concept d'élasticité directionnelle ne se limite pas à celui de la théorie de la production. Beaucoup de phénomènes susceptibles d'être formalisés à l'aide d'une ou plusieurs fonctions à n variables ayant les propriétés décrites précédemment pourront être analysés à l'aide de ce concept, dès que l'on voudra connaître, en approximation linéaire, l'effet d'accroissements quelconques des variables sur les valeurs de ces fonctions, indépendamment des unités de mesure choisies.

Genève, mai 1973

Note complémentaire

Le professeur Serge-Christophe Kolm a bien voulu lire cet article et nous faire part des remarques suivantes :

1. Si chaque x_i est fonction du temps, l'élasticité directionnelle est égale au taux de croissance de y en considérant, comme coefficients directeurs a_i , les taux de croissance des variables $\dot{x}_i/x_i$.

2. On peut démontrer les deux théorèmes suivants :

a) Il existe un ensemble de coefficients directeurs fixes tels que l'élasticité directionnelle soit la même en tout point si et seulement si la fonction de production est pseudo-homogène dérivable (les coefficients directeurs sont alors les degrés d'homogénéité de la fonction).

b) L'élasticité directionnelle est constante, quels que soient les coefficients directeurs si et seulement si la fonction de production est Wicksell-Cobb-Douglas⁶.

⁶ Le lecteur trouvera la démonstration de ces deux théorèmes dans la communication de M. Kolm intitulée : « Innovations augmentantes multi-neutres, croissance stable déséquilibrée et productions quasi- et pseudo-homogènes » présentée au Congrès d'économétrie d'Oslo (août 1973).

Résumé

Une généralisation des notions d'élasticité de production : l'élasticité directionnelle

L'élasticité directionnelle permet de mesurer, en approximation linéaire, l'accroissement relatif d'une fonction à n variables lorsque l'on donne à chaque variable un accroissement relatif quelconque (défini par un coefficient – quelconque – multipliant un accroissement relatif unitaire). L'élasticité directionnelle est définie comme le rapport de l'accroissement relatif (en approximation linéaire) de la fonction à l'accroissement relatif unitaire précité; elle est égale au produit scalaire du vecteur des élasticités partielles de la fonction et du vecteur des coefficients mentionnés précédemment. De façon équivalente, l'élasticité directionnelle peut être définie comme une limite, par une méthode voisine de celle qui est utilisée pour définir la dérivée directionnelle.

On a montré différentes propriétés de ce concept, et une extension à des fonctions vectorielles a été effectuée; on en a également indiqué une interprétation géométrique, ainsi qu'une application à certains types de fonctions de production.

Zusammenfassung

Richtungselastizität, eine Verallgemeinerung des Begriffes der Produktionselastizität

Die Richtungselastizität misst, in linearer Annäherung, den relativen Zuwachs einer Funktion von n -Variablen, wenn jede Variable einen beliebigen relativen Zuwachs erhält (definiert als Produkt eines beliebigen Koeffizienten mit einem relativen unitären Zuwachs). Die Richtungselastizität wird definiert als Verhältnis des relativen Zuwachses der Funktion zu diesem unitären Zuwachs; sie ist gleich dem Skalarprodukt des Vektors der partiellen Elastizitäten der Funktion mit dem Vektor, dessen Komponenten die oben erwähnten Koeffizienten sind. Die Richtungselastizität ist auch als Grenzwert erklärt, in Analogie zur Definition der Richtungsableitung.

Verschiedene Eigenschaften und eine geometrische Interpretation dieses Begriffes werden entwickelt. Zudem wird die Richtungselastizität auf Vektoren von Funktionen mehrerer Variablen ausgedehnt und auf verschiedene Typen von Produktionsfunktionen angewendet.

Summary

A generalisation of the concept of elasticity : directional elasticity

The directional elasticity measures, in linear approximation, the relative increase of an n -variable function when each variable is given a relative increase (defined as a coefficient – whatsoever – multiplying a unit relative increase). Directional elasticity, defined as the ratio of the relative increase of the function to the unit relative increase, is equal to the dot product of the function's partial elasticities vector and of the vector of the above-mentioned coefficients. It has also been defined as a limit, in analogy to the definition of the directional derivative.

Several properties of this concept and an extension to vector-valued functions have been given, as well as a geometrical interpretation and an application to various types of production functions.