

Note sur l'interprétation économique de la notion d'élasticité directionnelle proposée par O. de La Grandville

Par Fabrizio Carlevaro, Genève

Dans un article paru récemment dans cette revue¹, Olivier de La Grandville propose un nouveau concept d'élasticité de production dont il analyse les propriétés formelles et pour lequel il suggère une interprétation géométrique. Malheureusement, aucune interprétation économique de ce concept n'est proposée par l'auteur, ce qui laisse sans réponse la question de l'intérêt concret de cette notion². Dans cette note, nous nous proposons d'examiner ce point.

Pour une fonction de production³

$$y = f(x), x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+,$$

possédant des dérivées partielles continues, l'élasticité directionnelle, E_a , en un point donné de l'espace des facteurs, est définie par O. de La Grandville comme le facteur de proportionnalité entre la variation différentielle relative de la production,

$$\frac{dy}{y} = \sum_{i=1}^n e_i \frac{dx_i}{x_i}, \text{ avec } e_i = \frac{x_i}{y} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (1)$$

et la variation différentielle relative $\frac{d\lambda}{\lambda}$ lorsqu'on pose:

$$\frac{dx_i}{x_i} = a_i \frac{d\lambda}{\lambda}, i = 1, 2, \dots, n, \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

où les a_i sont des constantes non identiquement nulles, appelées coefficients directeurs. En remplaçant les variations différentielles (2) dans la différentielle logarithmique (1), on en déduit l'expression de l'élasticité directionnelle qui s'écrit:

¹ O. de La Grandville, «Une généralisation des notions d'élasticité de production: l'élasticité directionnelle», Revue suisse d'Economie politique et de Statistique, 110, 1, mars 1974, pp. 35-47.

² Il ne nous semble pas que l'exemple numérique proposé par l'auteur à la page 36 soit de nature à éclairer ce point.

³ Le symbole x désigne un vecteur dont les n composantes seront notées x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, et $\mathbb{R}_+^n$ l'ensemble ouvert des vecteurs à n composantes strictement positives.

$$E_a = \sum_{i=1}^n e_i a_i. \quad (3)$$

Comme le souligne justement l'auteur, l'élasticité directionnelle généralise la notion conventionnelle d'élasticité partielle que l'on obtient en annulant tous les paramètres a_i , sauf un égal à l'unité, ainsi que la notion d'élasticité d'échelle obtenue en posant tous les paramètres a_i égaux à un.

Mais quelle est donc la signification concrète de la quantité E_a ? D'après les conditions (1) et (2), il apparaît que l'élasticité directionnelle fournit une mesure sans dimension de l'impact sur la production y d'une variation marginale conjointe des facteurs de production x le long d'un «sentier d'expansion» $x = x(\lambda)$ défini par le système d'équations différentielles (2).

L'expression paramétrique explicite de ce sentier d'expansion peut être déterminée en intégrant le système (2) par rapport à λ . Cela conduit à

$$\log x_i = a_i \log \lambda + k_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

où les constantes k_i sont déterminées par des conditions initiales. En posant, par exemple, $x(1) = x^0$, on obtient :

$$k_i = \log x_i^0, i = 1, 2, \dots, n,$$

et les relations ci-dessus s'écrivent :

$$x_i = x_i^0 \lambda^{a_i}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Celles-ci définissent une courbe de l'espace $\mathbb{R}^n$ dont la forme peut être déterminée en recherchant l'intersection des $n-1$ surfaces définies par les $n-1$ relations suivantes⁴:

$$x_i = x_i^0 \left(\frac{x_n}{x_n^0} \right)^{\frac{a_i}{a_n}}, i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5)$$

obtenues en éliminant du système (4) le paramètre λ , d'après le n -ème relation.

Dès lors, pour l'étude locale d'une fonction de production, on pourra avoir recours à la notion d'élasticité directionnelle chaque fois que l'on est astreint à modifier les combinaisons de facteurs en observant des relations strictes pouvant être représentées analytiquement par l'expression (4). Il s'agira notamment de

⁴ Par exemple, lorsque tous les a_i sont égaux, ces relations définissent $n-1$ plans dont l'intersection est une droite issue de l'origine.

relations résultant de comportements économiques particuliers ou imposées par des complémentarités technico-économiques strictes qui apparaissent au stade de l'approvisionnement en facteurs de production.

Néanmoins, on constate qu'il existe une infinité de représentations paramétriques équivalentes à la (4), en ce sens qu'elles définissent toutes la même courbe dans l'espace des facteurs. En effet, en posant $\lambda = \lambda(\mu)$, où $\lambda(\mu)$ désigne une fonction biunivoque positive, définie sur $\mathbb{R}_+^1$, les relations (4) s'écrivent :

$$x_i = x_i^0 \lambda(\mu)^{\alpha_i} = x_i(\mu). \quad (6)$$

Celles-ci définissent la même courbe quelle que soit la forme de la transformation biunivoque $\lambda(\mu)$, car en éliminant de (6) le paramètre μ , d'après la n -ème relation, on obtient évidemment les équations (5).

En choisissant cette nouvelle représentation paramétrique du sentier d'expansion, les différentielles logarithmiques des x_i s'écrivent :

$$\frac{dx_i}{x_i} = \left(\alpha_i \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{d\mu}{\mu},$$

et l'élasticité directionnelle devient :

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\mu}{\lambda} = \left(\frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\mu}{\lambda} \right) E_u.$$

Elle n'est donc invariante que dans les transformations $\lambda(\mu)$ pour lesquelles

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\mu}{\mu},$$

c'est-à-dire lorsque $\mu = k\lambda$, où k désigne une constante arbitraire.

Ce manque d'invariance par rapport à une représentation paramétrique arbitraire rend le concept d'élasticité directionnelle assez fragile. En effet, cette notion n'aura un sens précis que si l'on attribue une signification concrète non seulement au sentier d'expansion choisi mais également au paramètre λ , ou du moins à sa variation différentielle relative $\frac{d\lambda}{\lambda}$. C'est le cas, notamment, lorsqu'on envisage une échelle de production

pour laquelle $\frac{d\lambda}{\lambda}$ s'identifie à la variation différentielle relative de l'un quelconque des facteurs de production :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dx_i}{x_i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

En revanche, lorsque λ désigne le temps, le concept de taux de croissance de la production qui représente le facteur de proportionnalité entre la variation différentielle relative de y et la variation différentielle absolue du temps t :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

semble beaucoup plus intéressant que celui d'élasticité directionnelle. En effet, quel pourrait être l'intérêt d'envisager des variations différentielles relatives du temps, en raison, notamment, du fait que la variable t n'est repérable qu'à partir d'une origine dont le choix est parfaitement arbitraire?

On observe, néanmoins, que le taux de croissance de la production coïncide avec l'élasticité directionnelle lorsque :

$$\frac{1}{x_i} \frac{dx_i}{dt} = a_i, i = 1, 2, \dots, n,^5$$

c'est-à-dire, en posant $x(0) = x^0$, lorsque le niveau d'utilisation de chaque facteur de production évolue dans le temps à taux constant :

$$x_i(t) = x_i^0 e^{a_i t}, i = 1, 2, \dots, n.$$

⁵ Ce résultat est mentionné dans la note complémentaire à l'article de *O. de La Grandville*.