

Propriété d'invariance et applications de l'élasticité directionnelle: réponse

par Olivier de La Grandville, Genève

Dans sa «Note sur l'interprétation économique de la notion d'élasticité directionnelle», M. F. Carlevaro semble regretter une absence d'interprétation économique du concept d'élasticité directionnelle. Mais une telle interprétation nous paraît évidente si l'on se réfère à la définition de ce concept; nous n'y reviendrons donc pas. En revanche, nous mentionnerons quelques-unes des applications économiques de ce concept.

Mais auparavant, nous sommes obligé de rectifier un certain nombre d'erreurs contenues dans la note de F. Carlevaro: d'abord, le chemin de déplacement n'est pas un ensemble de fonctions-puissance, comme l'affirme F. Carlevaro, mais un ensemble de *fonctions affines*. Ensuite, F. Carlevaro se propose de montrer que l'élasticité directionnelle ne possède pas la propriété d'invariance avec un changement dans la représentation paramétrique du chemin de déplacement, et fonde sa critique sur ce point; mais sa démonstration est erronée, et nous verrons que l'élasticité directionnelle possède bel et bien *cette propriété d'invariance*.

1. Le chemin de déplacement est donné par un ensemble de fonctions affines

En effet, si l'on veut obtenir ce chemin, il faut intégrer par rapport à λ les équations

$$\frac{dx_i}{x_i^0} = a_i \frac{d\lambda}{\lambda^0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et non le système

$$\frac{dx_i}{x_i} = a_i \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

comme l'a fait F. Carlevaro.

On est alors conduit à:

$$x_j = \frac{a_j x_j^0}{a_i x_i^0} x_i + x_j^0 \left(1 - \frac{a_j}{a_i}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$$

qui est une fonction affine et non une fonction puissance.

Nous avons précisé dans le texte que l'on se situait en un point x^o bien défini, et nous l'avons rappelé dans la notation même de l'élasticité directionnelle: $E_a f(x^o)$ ¹. Il ne peut donc y avoir d'ambiguïté quant au chemin de déplacement²; ceci est d'autant plus évident que nous avons défini, de façon équivalente, $E_a f(x^o)$ comme la limite suivante:

$$E_a f(x^o) = \frac{1}{f(x^o)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^o + h \hat{a} x^o) - f(x^o)}{h}$$

où h est un accroissement relatif (nombre sans dimension) et $\hat{a}$ la matrice diagonale des coefficients directeurs. Si l'on examine cette expression, on constate que le chemin de déplacement est une *droite* (qui ne passe par l'origine que si tous les coefficients directeurs sont égaux).

2. L'élasticité directionnelle est invariante avec une transformation paramétrique du chemin de déplacement.

Pour le montrer, considérons la transformation biunivoque arbitraire mentionnée par F. Carlevaro: $\lambda = g(\mu)$.

$$d\lambda = \frac{dg}{d\mu}(\mu^o) d\mu$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda^o} = \frac{1}{g(\mu^o)} \frac{dg}{d\mu}(\mu^o) d\mu = \frac{g'(\mu^o)}{g(\mu^o)} d\mu$$

et par conséquent

$$\frac{dx_i}{x_i^o} = a_i \frac{d\lambda}{\lambda^o} = a_i \frac{g'(\mu^o)}{g(\mu^o)} d\mu.$$

En intégrant, on obtient:

$$x_i = \frac{a_i x_i^o}{g(\mu^o)} g'(\mu^o) \mu + x_i^o \left[1 - \frac{a_i g'(\mu^o) \mu^o}{g(\mu^o)} \right]$$

et, de façon symétrique,

¹ Ceci ne veut pas dire que l'élasticité directionnelle ne peut être considérée comme une fonction: bien au contraire, $E_a f(x)$ sera une fonction à 2 n variables (a, x).

² Indépendamment de ceci, la formule (5) à la page 650 dans le texte de F. Carlevaro est erronée: d'après la démonstration de celui-ci, x_i n'est pas «égal» à $x_i^o \left(\frac{x_i}{x_i^o} \right)^{a_i/a_n}$ mais à $x_i^o \left(\frac{x_i}{x_n^o} \right)^{a_i/a_n}$; cette erreur se retrouve à la page 651.

$$x_j = \frac{a_j x_j^o}{g(\mu^o)} g'(\mu^o) \mu + x_j^o \left[1 - \frac{a_j g'(\mu^o) \mu^o}{g(\mu^o)} \right];$$

en éliminant μ on obtient :

$$x_j = \frac{a_j x_j^o}{a_i x_i^o} x_i + x_j^o \left[1 - \frac{a_j}{a_i} \right].$$

Le chemin $x_j = x_j(x_i)$ reste le même avec un changement $\lambda = g(\mu)$ arbitraire.

Quant à l'élasticité directionnelle mesurée le long du chemin représenté paramétriquement par $g(\mu)$, elle est égale à :

$$E_a f(x^o) = \frac{dy}{y^o} \bigg/ \frac{g'(\mu^o)}{g(\mu^o)} d\mu.$$

Etant donné que l'on a

$$dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^o) dx_i$$

et

$$dx_i = a_i x_i^o \frac{g'(\mu^o)}{g(\mu^o)} d\mu,$$

on obtient :

$$E_a f(x^o) = \frac{dy}{y^o} \bigg/ \frac{g'(\mu^o)}{g(\mu^o)} d\mu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x^o) a_i \frac{x_i^o}{y^o} = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Par conséquent, l'élasticité directionnelle *possède la propriété d'invariance* avec un changement dans la représentation paramétrique du chemin de déplacement. Nous ne suivrons donc pas F. Carlevaro dans ses conclusions.

3. Applications économiques de l'élasticité directionnelle

Nous indiquerons, au moins dans leurs grandes lignes, certaines applications de ce concept.

Nous nous permettons de nous référer d'abord aux travaux du professeur Serge-Christophe Kolm (1973) que nous avons mentionnés dans notre article, ainsi qu'à sa récente monographie «*Structures méta-homogènes des productions et préfé-*

rences» (Ecole Pratique des Hautes Etudes, Paris, 1974). En utilisant des extensions à la pseudo-homogénéité des théorèmes d'Euler relatifs à l'homogénéité, l'auteur a pu montrer qu'une fonction est pseudo-homogène si et seulement si son élasticité directionnelle est constante pour un vecteur directionnel donné.

Parmi les autres résultats obtenus par le professeur Kolm qui font usage de la notion d'élasticité directionnelle, mentionnons le théorème indiquant l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit pseudo-homothétique dérivable (l'homothétie et la pseudo-homogénéité sont des cas particuliers de la pseudo-homothétie); naturellement, ce théorème peut s'appliquer aussi bien aux fonctions de production qu'aux indicateurs d'utilité (cf. *op.cit.*, pp. 56-57).

Par ailleurs, et dans un autre domaine, nous avons utilisé l'élasticité directionnelle afin de généraliser certains résultats de statique comparative; il en résulte des applications aussi bien dans la théorie néo-classique du producteur que dans celle du choix optimal du consommateur. En particulier, nous en avons déduit (dans un texte à paraître) une généralisation de l'équation de la valeur (équation de Slutsky) indiquant la variation de la demande d'un bien lorsque l'ensemble des variables exogènes (le revenu de l'individu et les prix) se modifie de manière quelconque. Nous avons été conduit de ce fait à une généralisation des effets bien connus de «substitution» et de revenu.