

Eine Methode zur Schätzung der Zinsstruktur in der Schweiz

Von Urs Beer, Basel*

1. Einleitung

Der Zinssatz nimmt in der makroökonomischen Theorie in praktisch allen Teilgebieten eine wichtige Stellung ein. Die Bildung der wissenschaftlichen Modelle beschränkt sich dabei in der Regel auf einen einzigen Zinssatz. Diese Betrachtungsweise erweist sich bei Entscheiden über mehrere Perioden, wie beispielsweise bei langfristigen Kapitalanlagen, als unzureichend. Auch für die Bewertung zinsabhängiger Finanzinstrumente (Obligationen, Zinsfutures und -optionen) sowie für die Strukturierung und Risikobeurteilung von Obligationendepots ist die Kenntnis der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze von grosser Bedeutung. Sie stellt in einem bestimmten Zeitpunkt die Beziehung zwischen der Laufzeit und der Rendite einmaliger Zahlungen dar¹. Die Zinsstruktur darf nicht mit den aus Verfallrenditen von Couponobligationen berechneten Renditekurven verwechselt werden.

In der Literatur der Finanzmarkttheorie findet man verschiedene Ansätze zur Schätzung der Zinsstruktur. Die meisten behandeln dabei die Märkte der Regierungsanleihen in den Vereinigten Staaten von Amerika oder in Grossbritannien. Diese genügen den Anforderungen der Sicherheit des Schuldners, haben eine grosse Anzahl sowie ein ausreichendes Volumen ausstehender Anleihen und eine gute Sekundärmarktliquidität. Die Schätzung erfolgt dabei entweder mit einem regressionsstatistischen Verfahren² oder anhand eines linearen Optimierungsprogramms (*Schaefer*, 1981). Für die Schweiz gibt es bis anhin noch wenige empirische Schätzungen der Zinsstruktur. Mit einem faktoranalytischen Ansatz untersucht sie *Capitelli* (1983) im Zeitablauf anhand von konventionellen Renditekurven eidgenössischer Anleihen. Bei einem nicht flachen Verlauf können dabei insbesondere im langfristigen Laufzeitbereich aufgrund der Arithmetik der Verfallrendite, die alle anfallenden Zahlungen mit derselben Rendite abdiskontiert, grössere Unterschiede zur Fristigkeitsstruktur der Zinssätze entstehen³. Die Gründe für das mangelnde Interesse zur Schätzung

* Der Autor ist Mitarbeiter der Abteilung Finanzanalyse und Anlageberatung des Schweizerischen Bankvereins. Er dankt unter den üblichen Vorbehalten den Herren Dr. B. Poschadel und O. Reim für die grosszügige Diskussionsbereitschaft.

¹ In der angelsächsischen Literatur wird dafür der Begriff "term structure of interest rates" verwendet. Die Renditen der Kassazinssatzstruktur, d.h. die Renditen von reinen Diskontpapieren für verschiedene Laufzeiten, werden "spot rates" und jene der impliziten Terminzinssatzstruktur "forward rates" genannt.

² Vgl. z. B. *McCulloch* (1971, 1975), *Carleton/Cooper* (1976) und neueren Datums *Litzenberger/Rolfo* (1984) oder *Chambers/Carleton/Waldman* (1984). *Bussmann* (1989) vergleicht einige Verfahren dieser Art für den deutschen Rentenmarkt.

³ Ist der Verlauf einer konventionellen Renditekurve ansteigend (sinkend), so liegt die Kassazinssatzstruktur darüber (darunter). Bei einer flachen Zinsstruktur stimmen beide Konzepte überein.

der Zinsstruktur in der Schweiz sind sicher das geringe Volumen der emittierten Bundesanleihen (ca. 4% am ausstehenden Obligationenbestand in- und ausländischer Schuldner), relativ hohe Transaktionskosten, viele vorhandene Kündigungsklauseln, eine mangelhafte Sekundärmarktiliquidität und die historisch geringen Zinsschwankungen.

Im folgenden wird die Zinsstruktur für die Schweiz mit qualitativ erstklassigen nicht kündbaren Anleihen einer relativ homogenen Schuldnerkategorie, der internationalen Entwicklungsbanken (Asiatische Entwicklungsbank, Europäische Investitionsbank, Inter-Amerikanische Entwicklungsbank, Weltbank), geschätzt. Hätte dieses Marktsegment für das betrachtete Laufzeitspektrum genügend Nullcouponanleihen ausstehend, so wäre die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze bis auf mögliche temporäre Fehlbewertungen gegeben. Da dies in der Realität nicht der Fall ist, müssen die Diskontfaktoren einmaliger künftiger Zahlungsströme unter Zuhilfenahme von Couponobligationen empirisch ermittelt werden. Eine Couponanleihe stellt nämlich nichts anderes dar als eine Serie mehrerer einzelner Zahlungen, welche gemeinsam verkauft und gehandelt werden.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Im nächsten Abschnitt wird ein Modell zur Schätzung der Zinsstruktur vorgestellt. Das dritte Kapitel beinhaltet die Diskussion der empirischen Ergebnisse für die Schweiz. Eine kurze Zusammenfassung und einige Folgerungen bilden den Schluss.

2. Das Modell

Der Gegenwartswert einer insolvenzrisikolosen und unkündbaren Couponobligation ergibt sich (bei jährlicher Zinszahlung) aus:

$$PV = \sum_{t=1}^m C \cdot d(t - \tau) + FV \cdot d(n) = \sum_{t=1}^m CF \cdot d(t - \tau) \quad (1)$$

wobei

PV	= Gegenwartswert der Obligation
FV	= Rückzahlungsbetrag der Obligation
C	= Couponzahlung der Obligation
CF	= Zahlungsstrom ("Cash flow")
n	= Restlaufzeit in Jahren
m	= aufgerundete Restlaufzeit in Jahren $[\text{int}(n + 1)]$
τ	= Zeit seit dem letzten Coupontermin in Jahren $(m - n)$
$d(t - \tau)$	= Diskontfaktor für Zahlungen im Zeitpunkt $t - \tau$
t	= Zeitpunkt in der Zukunft $(t > 0)$

Würden für alle $i (i = 1, \dots, h)$ ausstehenden Obligationen der betrachteten Schuldnerkategorie die Zins- und Rückzahlungen jeweils am selben Termin statt-

finden, d.h. τ ist für alle i Obligationen gleich, so könnten bei einer genügend grossen Stichprobe [$h > \max(m_i)$] diskrete Diskontfaktoren ökonometrisch ermittelt werden (vgl. *Carleton/Cooper*, 1976). Die Voraussetzung dazu ist allerdings, dass es nicht zwei aufeinanderfolgende Zahlungszeitpunkte gibt, an denen keine Anleihe fällig wird. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist die Datenmatrix der unabhängigen Variablen nicht regulär und eine Regressionsschätzung folglich nicht möglich⁴. Falls der Obligationenmarkt diese Idealvoraussetzungen nicht erfüllt, müssen die diskreten Diskontfaktoren durch eine kontinuierliche Diskontfunktion angepasst werden. Dies erlaubt es, trotz der in der Realität bestehenden Vielfalt von deterministischen Coupon- und Rückzahlungsterminen, den exakten Zeitpunkt einer künftigen Zahlung in die Schätzung der Diskontfunktion und damit auch der Zinsstruktur einfließen zu lassen.

Welche theoretischen Anforderungen muss die Diskontfunktion, die das Austauschverhältnis zwischen heutigem und künftigem Geld festlegt, aus ökonomischer Sicht erfüllen? Für den Zeitpunkt 0, d.h. heute, muss $d(0) = 1$ sein, da der heutige Wert einer Geldeinheit genau 1 ist. Bei Minderschätzung künftiger Bedürfnisse und Mehrergiebigkeit längerer Produktionswege muss ihr Wert für jeden weiteren Termin kleiner als 1 sein. Die Funktion sollte ferner monoton nicht steigend sein, da ein Wirtschaftssubjekt bei positiven Zinssätzen kaum bereit ist, für eine zusätzliche Wartefrist einer Zahlung mehr zu bezahlen: Das zinslose Horten einer Währung ist beinahe kostenlos. Aus der Diskontfunktion $[d(t)]$, die den Gegenwartswert einer Geldeinheit im Zeitpunkt t darstellt, ist die Kassa- $[R(t)]$ und die implizite Terminzinssatzstruktur $[F(t)]$ sofort herleitbar. Die Definitionen dieser Zinskonzepte lauten:

$$d(t) = \frac{1}{[1 + R(t)]^t}, \quad R(t) = \left[\frac{1}{d(t)} \right]^{(1/t)} - 1 \quad (2)$$

respektive

$$F(t) = \frac{d(t-1)}{d(t)} - 1 = \frac{[1 + R(t)]^t}{[1 + R(t-1)]^{t-1}} - 1 \quad (3)$$

Das Verfahren der Approximation der Diskontfunktion $d(t)$ ist zentral für die Güte der Anpassung der Zinsstruktur. Gemäss *McCulloch* (1971) kann die Diskontfunktion $d(t)$ durch eine Linearkombination von $k + 1$ kontinuierlich differenzierbaren Komponentenfunktionen $f_j(t)$, $j = 0, \dots, k$ approximiert werden:

$$d(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot f_j(t) \quad (4)$$

⁴ Eine Datenmatrix ist singulär (und damit nicht invertierbar), wenn zwei Spalten- respektive Zeilenvektoren identisch sind. Dies wäre der Fall, wenn z. B. in den ersten beiden diskreten Zeitpunkten bei allen Obligationen lediglich jeweils gleich hohe Couponzahlungen anfallen würden. Die Zahlungsströme der betrachteten Obligationen dürfen zusätzlich nicht linear abhängig sein.

Dabei stellt α_j das Gewicht der jeweiligen Funktion $f_j(t)$, t den Zeitpunkt einer bestimmten künftigen Zahlung und $f_j(t)$ eine weiter unten noch näher zu definierende Funktion dar. Der zu bestimmende Schätzwert für α_j gibt also das Gewicht jeder einzelnen Approximationsfunktion j für die effektiv resultierende geschätzte Diskontfunktion wieder. Der Diskontfunktion wird durch eine Linearkombination von stetig verlaufenden Komponentenfunktionen ein glatter Kurvenverlauf auferlegt. Eine einfache Anpassung der Diskontfunktion wäre durch

$$d(t) = 1 + \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot t^j, \quad \text{d. h.} \quad f_j(t) = t^j \quad (5)$$

möglich. Durch dieses Polynom k -ten Grades wäre gewährleistet, dass die Funktion kontinuierlich differenzierbar und an der Stelle $d(0) = 1$ wäre. Die Bedingung, dass $d(t)$ monoton nicht steigend ist, wird aber durch diese Wahl a priori nicht sichergestellt. McCulloch (1971) schlägt deshalb eine Approximation durch quadratische und später (1975) durch kubische Splines vor⁵. Es hat sich aber gezeigt, dass auch diese beiden Ansätze eine ökonomisch unbefriedigende negative implizite Terminzinssatzstruktur nicht ausschliessen und die Zinsstruktur an den Stützstellen teilweise fast sprunghaft verlaufen kann. Im folgenden wird deshalb das von Schaefer (1981) vorgeschlagene Verfahren, welches explizit zur Approximation monotoner nicht steigender Funktionen dient, verwendet. Gemäss dieser Methode ist die Funktion $f_j(t)$ in (4) folgendermassen gegeben:

$$f_0(t) = \text{sign}[d(0)] = 1 \quad (6)$$

$$f_j(t) = \sum_{r=0}^{k-j} (-1)^{(r+1)} \cdot \binom{k-j}{r} \cdot t^{(j+r)/(j+r)}, \quad j = 1, \dots, k \quad (7)$$

Dabei ist t im Intervall von 0 bis 1 definiert. Bei der empirischen Schätzung muss folglich der Zeitpunkt einer Zahlung skaliert werden, indem der effektive künftige Zeitpunkt eines Zahlungsstroms durch die längste Laufzeit der Obligation in der betrachteten Auswahl dividiert wird. Um sicherzustellen, dass die Diskontfunktion

⁵ Ein kubischer Spline ist eine Folge von kubischen Polynomen mit kontinuierlicher erster und zweiter Ableitung an den Stützstellen. Bei diesem Verfahren wird der gesamte Laufzeitbereich, für den die Zinsstruktur geschätzt wird, in mehrere Intervalle unterteilt und in jedem ein Polynom für die Approximation der Diskontfunktion verwendet.

an den Stellen $d(0) = 1$ und $d(1) \geq 0$ ist, müssen die folgenden Nebenbedingungen erfüllt sein:

$$\alpha_j \geq 0, \quad j = 0, \dots, k \quad (8)$$

$$\alpha_0 = 1 \quad (9)$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot f_j(1) \geq 0 \quad (10)$$

Mit Hilfe der in (4) definierten Diskontfunktion kann der Gegenwartswert einer Couponobligation (1) dargestellt werden als

$$PV = \sum_{t=1}^m CF(t - \tau) \cdot \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot f_j(t - \tau) \quad (11)$$

Durch Umformung von (11) ergibt sich, dass der Gegenwartswert einer Anleihe eine lineare Funktion der Gewichte α_j ist.

$$PV = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \sum_{t=1}^m CF(t - \tau) \cdot f_j(t - \tau) \quad (12)$$

Für alle i Obligationen, die in die Schätzung der Zinsstruktur eingehen, kann (12) wie folgt in Matrixform geschrieben werden:

$$P = X\alpha \quad (13)$$

P stellt dabei einen $h \cdot 1$ -Vektor aller Gegenwartswerte PV_i , X eine $h \cdot (k + 1)$ -Matrix⁶ und α einen $(k + 1) \cdot 1$ -Vektor der unbekannten Gewichte dar.

Für die Schätzung der Gewichte α_j ist ein konkretes Lösungsverfahren notwendig. *Schaefer* (1981) verwendet für dieses Problem ein lineares Optimierungsprogramm. Die Zielfunktion besteht dabei in der Maximierung exogen vorgegebener abdiskontierter Zahlungsströme für jeden zur Diskussion stehenden künftigen Zeitpunkt. Neben (8), (9) und (10) wird die Bedingung, dass der Preis jeder Obligation nicht höher als ihr Gegenwartswert sein darf, als Restriktion berücksichtigt. In der Optimallösung bestimmen bei diesem Verfahren die relativ billigsten Obligationen auf dem Markt die Zinsstruktur. Bei Abwesenheit von Steuern und Transaktionskosten würden rationale Investoren nur diese Anleihen halten. Es hat sich gezeigt, dass in der Schweiz aufgrund der kleinen möglichen Datenbasis nur wenige Obligationen in die Optimallösung eingehen und die anderen zum Teil recht stark überbewertet sind.

⁶ $\sum_{i=1}^h \sum_{j=0}^k \sum_{t=1}^{m_i} CF_i(t - \tau_i) \cdot f_j(t - \tau_i)$

Im folgenden wird deshalb für den Schweizer-Franken-Obligationenmarkt ein quadratisches Optimierungsprogramm vorgeschlagen, bei welchem die Fehlerquadratsumme zwischen den beobachteten und den geschätzten Gegenwartswerten unter den Restriktionen (8), (9) und (10) minimal ist. Damit wird – vereinfacht ausgedrückt – erreicht, dass die Zinsstruktur durch alle Obligationenpreise des betrachteten Schuldnersegments im Durchschnitt repräsentiert wird. Die am Markt bezahlten Gegenwartswerte der Obligationen, d. h. ihre Preise inklusive Marchzinsen, können im $h \cdot 1$ -Vektor y zusammengefasst werden. Damit sieht das gesamte Modell zur Schätzung der Diskontfunktion als Basis der Zinsstruktur wie folgt aus:

Minimiere

$$Z = (y - P)'(y - P) = (y - X\alpha)'(y - X\alpha) \quad (14)$$

unter

$$\alpha_j \geq 0 \quad j = 0, \dots, k \quad (15)$$

$$\alpha_0 = 1 \quad (16)$$

$$-\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot f_j(1) \leq 0 \quad (17)$$

Mit einem quadratischen Simplexalgorithmus (Wolfe, 1959) kann das Problem (14)–(17) unter Beachtung von (6) und (7) numerisch gelöst werden.

3. Empirische Ergebnisse

Für die empirische Schätzung der Diskontfunktion sind noch zwei Probleme offen: Die Auswahl der Obligationen (h) und die Anzahl der Komponentenfunktionen ($k + 1$). Die Anforderungen zur Schätzung der Zinsstruktur – eine genügend grosse Anzahl homogener nicht kündbarer und in qualitativer Hinsicht risikolose Obligationen für verschiedene Laufzeiten – erfüllen auf dem schweizerischen Obligationenmarkt am ehesten die Anleihen der internationalen Entwicklungsbanken (Asiatische Entwicklungsbank, Europäische Investitionsbank, Inter-Amerikanische Entwicklungsbank, Weltbank). Die Obligationen dieser Schuldnerkategorie sind im Gegensatz zu den ausländischen Untersuchungen nicht als vollständig insolvenzrisikolos zu betrachten. Diese Institutionen werden aber von den beiden grossen amerikanischen Ratingagenturen seit längerer Zeit mit dem besten Gütesiegel ausgezeichnet. Ende März 1989 können in der empirischen Analyse für dieses Schuldnersegment insgesamt 33 ausstehende nicht kündbare Obligationen mit Laufzeiten bis zu 13 Jahren verwendet werden. Über den gewählten Fristigkeitsbereich hinaus sind nur noch vereinzelte Anleihen ohne Kündigungsmöglichkeit für den Schuldner ausgestattet, weshalb sie

aufgrund der wenigen anfallenden Zahlungsströme in der Schätzung nicht berücksichtigt werden. Die Preise der Anleihen entstammen dem Kursblatt der Zürcher Effektenbörse vom 31. März 1989⁷.

Die Anzahl der Komponentenfunktionen ist bis zu einem gewissen Grad arbiträr. Während hohe Werte für k gewisse Irregularitäten (und Instabilitäten) zulassen, führt ein tiefes k zu einem relativ glatten Kurvenverlauf (vgl. Schaefer, 1982). Wird k zu hoch gewählt, so besteht die Gefahr, dass sich die Zinsstruktur zu gut an Ausreisserdaten (Fehlpreise) anpasst und folglich auch die implizite Terminzinssatzstruktur übermässig schwankt. Bei einer zu tiefen Auswahl von k kann die Diskontfunktion unter Umständen nur schlecht angepasst werden, vor allem wenn sie einen etwas komplizierteren Verlauf aufweist. Die *Tabelle 1* liefert eine Übersicht der Fristigkeitsstruktur der Zinssätze für verschiedene Werte von k . Daraus wird ersichtlich, dass die Diskontfaktoren $[d(t)]$ bei einer unterschiedlichen Anzahl von Komponentenfunktionen für längere Laufzeiten nicht stark divergieren. Bei den kurzen Laufzeiten sind die Unterschiede bei den geschätzten Diskontfaktoren jedoch grösser.

Tabelle 1: Die Zinsstruktur bei einer unterschiedlichen Anzahl Komponentenfunktionen k (31. März 1989)

Lauf- zeit (Jahre)	k=2			k=3			k=4			k=5			k=6			k=7			k=8		
t	d(t)	R(t)	F(t)	d(t)	R(t)	F(t)	d(t)	R(t)	F(t)	d(t)	R(t)	F(t)	d(t)	R(t)	F(t)	d(t)	R(t)	F(t)	d(t)	R(t)	F(t)
0	1.000	-	-	1.000	-	-	1.000	-	-	1.000	-	-	1.000	-	-	1.000	-	-	1.000	-	-
1	0.951	5.12	5.12	0.951	5.06	5.06	0.949	5.30	5.30	0.944	5.91	5.91	0.945	5.76	5.76	0.944	5.93	5.93	0.935	6.87	6.87
2	0.904	5.17	5.22	0.904	5.12	5.19	0.902	5.26	5.22	0.898	5.47	5.04	0.901	5.33	4.89	0.900	5.40	4.88	0.895	5.69	4.53
3	0.858	5.22	5.32	0.859	5.19	5.32	0.857	5.25	5.22	0.857	5.25	4.82	0.859	5.18	4.87	0.858	5.21	4.83	0.860	5.14	4.05
4	0.814	5.27	5.43	0.814	5.25	5.45	0.814	5.26	5.29	0.816	5.19	5.01	0.816	5.19	5.22	0.816	5.19	5.14	0.821	5.04	4.72
5	0.771	5.33	5.53	0.771	5.32	5.58	0.772	5.29	5.43	0.774	5.23	5.40	0.773	5.27	5.61	0.774	5.25	5.50	0.777	5.17	5.71
6	0.730	5.38	5.64	0.730	5.38	5.69	0.731	5.35	5.62	0.732	5.33	5.82	0.730	5.37	5.88	0.731	5.34	5.79	0.730	5.37	6.36
7	0.690	5.43	5.74	0.690	5.44	5.80	0.691	5.41	5.82	0.690	5.44	6.10	0.689	5.46	5.96	0.690	5.43	5.98	0.686	5.51	6.38
8	0.652	5.48	5.84	0.651	5.50	5.89	0.652	5.49	6.02	0.650	5.53	6.15	0.650	5.51	5.91	0.650	5.51	6.07	0.648	5.56	5.91
9	0.615	5.53	5.95	0.615	5.55	5.97	0.614	5.57	6.18	0.613	5.58	5.96	0.615	5.55	5.84	0.613	5.57	6.02	0.615	5.55	5.42
10	0.580	5.58	6.05	0.580	5.60	6.03	0.578	5.63	6.23	0.580	5.58	5.65	0.580	5.58	5.89	0.580	5.59	5.81	0.583	5.54	5.43
11	0.547	5.63	6.14	0.546	5.64	6.05	0.544	5.68	6.11	0.550	5.57	5.48	0.547	5.63	6.06	0.549	5.59	5.54	0.550	5.58	6.08
12	0.515	5.68	6.23	0.515	5.67	6.05	0.515	5.68	5.74	0.519	5.60	5.94	0.515	5.67	6.16	0.519	5.61	5.79	0.515	5.67	6.63
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:

d(t): Diskontfaktor, R(t): Kassazinssatz ("spot rate"), F(t): impliziter Terminzinssatz ("forward rate")

⁷ Bei mehreren bezahlten Abschlüssen wird für die Berechnungen der letztbezahlte Kurs verwendet. Wurde ein Titel an diesem Datum nicht gehandelt, so geht der Geld-, Brief- oder Mittelkurs, der am nächsten beim letztbezahlten Kurs des entsprechenden Titels liegt, in die Berechnungen ein. Die Obligationen und deren Preise am 31. März 1989 sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Für die konkrete Auswahl des k -Wertes muss bei der praktischen Anwendung zur Schätzung der Zinsstruktur eine Regel angewandt werden. Eine Möglichkeit wäre, die Standardabweichung der Preisfehler zu minimieren. In unserem Fall wäre dies bei $k = 6$ der Fall, d. h. die Diskontfunktion wird mit 7 Komponentenfunktionen geschätzt (vgl. *Tabelle 2*). Dieses Verfahren ist relativ rechenaufwendig, da die Standardabweichungen der Preisfehler für verschiedene k berechnet werden müssen. *McCulloch* (1971, 1975) zieht der Einfachheit halber eine exogene Vorgabe des k -Wertes in Abhängigkeit von der Grösse der Obligationenauswahl vor. Je mehr Obligationen in der Schätzung berücksichtigt werden, desto mehr Komponentenfunktionen sind möglich. Gemäss seinem Auswahlkriterium ist k bei der nächstmöglichen ganzen Zahl aus der Wurzel der Anzahl Obligationen in der Berechnung zu wählen $[\text{int}(\sqrt{h} + 0, 5)]$. Folgt man dieser Regel, so wäre die Zinsstruktur wiederum durch den Wert $k = 6$ gegeben.

Hat die Auswahl von k Auswirkungen auf den geschätzten Gegenwartswert der Obligationen? Diese Frage kann anhand der *Tabelle 2* beantwortet werden. In ihr sind die Preisfehler, d. h. der aufgrund der Zinsstruktur geschätzte Gegenwartswert abzüglich der am Markt beobachtete Preis einer Obligation, für eine unterschiedliche Anzahl von Komponentenfunktionen dargestellt. Mit geringfügigen Abweichungen sind zu teure (zu billige) Obligationen bei allen k -Werten zu teuer (zu billig). Unabhängig von der Auswahl von k kommt man somit im Normalfall zur selben relativen Bewertung der Obligationen. Auch die Grössenordnung der Preisfehler fällt ähnlich hoch aus. Interessant ist auch die Frage, ob bei der Bewertung von Obligationen in der Anlagepraxis systematische Fehler begangen werden. Bei einer gegebenen Bonität und Laufzeit orientieren sich die Investoren hauptsächlich an der Verfallrendite, bei der alle Zahlungsströme (implizit) mit derselben Rendite abdiskontiert werden und nicht mit den theoretisch relevanten laufzeitabhängigen Diskontfaktoren der Zinsstruktur. In der letzten Spalte der *Tabelle 2* sind die Preisfehler der Obligationen gegenüber einer konventionellen Renditekurve⁸ zu finden. Die Resultate sind aus der Sicht der Praxis ermutigend, zeigen sie doch, dass die Preisabweichungen im Normalfall in der selben Richtung ausfallen wie mit theoretisch exakteren Methoden, wobei aber die absolute Höhe des Preisfehlers stärker differiert als für unterschiedliche k -Werte⁹. Da die Zinsstruktur ab dem dritten Jahr

⁸ Die Berechnung der Renditekurve erfolgt mit einer linearen Regression anhand des folgenden Polynoms dritter Ordnung:

$$v_i = a + b \cdot t_i + c \cdot t_i^2 + d \cdot t_i^3$$

wobei v_i und t_i die Verfallrendite bzw. die Restlaufzeit der i -ten Obligation sowie a, b, c und d die zu schätzenden Koeffizienten sind (vgl. z. B. *Capitelli*, 1983, 88).

⁹ Die starke Fehlbewertung der 5^{1/4} % Anleihe der Asiatischen Entwicklungsbank 1989–99 von über 3% sticht besonders hervor. Diese Überbewertung ist an sich überraschend, ist dies doch die einzige Obligation in der Auswahl, die noch an der im allgemeinen liquideren Vorbörse gehandelt wird. Dieser Befund widerspricht der These, dass die Preisbildung in liquideren Märkten effizienter ist. Es könnte aber auch ein Indiz auf Kurspflege seitens der Emissionsbank sein.

Tabelle 2: Die Preisfehler bei einer unterschiedlichen Anzahl Komponentenfunktionen k (31. März 1989)

Coupon	Schuldner	Verfall	Preis	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	konventionelle Renditekurve
4.625 %	Weltbank	1989	99.5	0.410	0.424	0.365	0.183	0.187	0.132	-0.122	0.056
4.375 %	Weltbank	1989	99	0.637	0.672	0.526	0.107	0.148	0.031	-0.584	-0.046
4.5 %	IDB	1989	99	0.770	0.797	0.681	0.340	0.363	0.266	-0.226	0.083
7 %	Weltbank	1990	101	0.910	0.978	0.730	0.138	0.291	0.133	-0.775	-0.399
6.25 %	Weltbank	1992	104	-0.867	-0.778	-0.890	-0.825	-0.683	-0.769	-0.434	-1.113
7.25 %	Weltbank	1992	104	1.294	1.394	1.195	1.065	1.312	1.189	1.191	0.471
5.75 %	Weltbank	1992	102	-0.537	-0.444	-0.604	-0.641	-0.435	-0.541	-0.376	-0.961
7.25 %	Weltbank	1992	105	0.920	1.015	0.865	0.858	1.048	0.943	1.168	0.603
5.625 %	Weltbank	1993	102.75	-1.489	-1.417	-1.448	-1.275	-1.246	-1.284	-0.837	-1.241
5.5 %	Weltbank	1993	102.5	-1.701	-1.622	-1.689	-1.553	-1.470	-1.531	-1.108	-1.626
6 %	Weltbank	1993	102	0.697	0.762	0.759	0.944	0.929	0.910	1.336	1.084
5.75 %	Weltbank	1994	103	-1.161	-1.114	-1.061	-0.870	-0.965	-0.935	-0.612	-0.616
6.25 %	AÖB	1994	103.5	0.640	0.671	0.757	0.898	0.759	0.825	0.973	1.334
6 %	AÖB	1994	102.5	0.375	0.424	0.472	0.662	0.573	0.599	0.930	0.958
5 %	Weltbank A	1994	100.5	-2.195	-2.184	-2.070	-1.977	-2.138	-2.042	-2.049	-1.458
6.125 %	Weltbank	1994	102.5	1.088	1.117	1.207	1.343	1.200	1.269	1.399	1.787
5.75 %	Weltbank	1994	101.75	0.159	0.172	0.283	0.370	0.211	0.306	0.290	0.858
5.25 %	IDB A	1995	100	-0.782	-0.807	-0.685	-0.765	-0.882	-0.771	-1.108	-0.259
5.625 %	Weltbank A	1995	101.5	-0.231	-0.247	-0.123	-0.170	-0.305	-0.191	-0.479	0.381
6 %	Weltbank	1995	103	0.296	0.271	0.390	0.301	0.188	0.297	-0.053	0.810
6 %	Weltbank	1995	102	1.203	1.205	1.326	1.368	1.211	1.319	1.194	1.886
5.5 %	IDB A	1996	101.25	-0.731	-0.774	-0.668	-0.823	-0.881	-0.791	-1.199	-0.376
5.125 %	AÖB	1996	98	0.257	0.207	0.300	0.114	0.086	0.159	-0.260	0.537
5 %	IDB	1997	96.5	0.718	0.650	0.696	0.468	0.529	0.540	0.190	0.554
5.875 %	AÖB A	1997	101.5	1.182	1.113	1.147	0.913	0.990	0.989	0.654	0.972
5.25 %	Weltbank B	1997	98.75	-0.358	-0.443	-0.506	-0.672	-0.512	-0.614	-0.665	-1.077
5.5 %	IDB B	1997	100	0.119	0.035	-0.015	-0.202	-0.048	-0.139	-0.239	-0.615
4.625 %	IDB	1998	92	1.929	1.841	1.744	1.650	1.810	1.688	1.764	1.886
5 %	IDB	1999	94.25	1.512	1.444	1.209	1.537	1.493	1.463	1.732	0.137
5.25 %	AÖB	1999	101	-3.128	-3.207	-3.411	-3.228	-3.171	-3.270	-2.984	-4.480
4.75 %	AÖB	1999	94	0.083	0.005	-0.203	0.012	0.050	-0.037	0.258	-1.285
5.375 %	Weltbank	2001	97.25	0.432	0.554	0.620	0.725	0.557	0.732	0.489	1.286
5.125 %	EIB	2001	96	-0.656	-0.500	-0.321	-0.529	-0.443	-0.542	-0.440	0.847
Minimum				-3.128	-3.207	-3.411	-3.228	-3.171	-3.270	-2.984	-4.480
Maximum				1.929	1.841	1.744	1.650	1.810	1.688	1.764	1.886
Mittelwert				0.054	0.067	0.048	0.014	0.023	0.010	-0.030	0.002
Standardabweichung				1.122	1.119	1.112	1.076	1.075	1.078	1.077	1.252

Anmerkungen: Die Preisfehler sind definiert als geschätzter Gegenwartswert abzüglich beobachteter Marktpreis (inklusive Marktzinsen) jeweils in Prozent des Nominalwertes. Positive (negative) Preisfehler deuten auf zu billige (teure) Obligationen hin.

relativ flach verläuft, kann dieses Ergebnis rein zufällig zustande kommen. Es hat sich aber gezeigt, dass die präsentierten Ergebnisse auch bei ansteigenden Renditekurven, wo die Kassazinssatz- über der Renditekurve liegen muss, ihre Gültigkeit besitzen.

Bei einem Vergleich der Preisfehler mit der Couponhöhe oder der Laufzeit kann empirisch kein systematischer Zusammenhang festgestellt werden. Da in der Regel Couponeinnahmen im Gegensatz zu Kapitalgewinnen als Einkommen versteuert wer-

den müssen, wäre eine Präferenz zu tiefer verzinslichen Obligationen, die unter *Pari* notieren, zu erwarten. Folglich würden bei Obligationen mit kleineren *Couponzahlungen* die negativen Preisfehler häufiger auftreten. Im Kontrast zu den ausländischen Untersuchungen deutet dieses Ergebnis darauf hin, dass in diesem Marktsegment des schweizerischen Obligationenmarktes das Steuerproblem eine untergeordnete Rolle spielt. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass die Höhe der *Couponzahlungen* aufgrund der relativ geringen historischen Zinssatzschwankungen nicht sehr stark divergiert. Trotzdem wäre es natürlich möglich, anhand der hier präsentierten Methode die relativ billigsten Anleihen eines Marktsegments für Investoren mit einem spezifischen marginalen Steuersatz zu ermitteln (vgl. z. B. *Schaefer*, 1982).

4. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Der vorliegende Aufsatz stellt, basierend auf der Grundlage von *Schaefer* (1981), eine Methode zur Schätzung der Zinsstruktur in der Schweiz vor. Sie berücksichtigt jedoch die in der hiesigen Realität vorhandenen Marktunvollkommenheiten besser, da die durchschnittlichen beobachteten Preise und nicht die (wenigen) billigsten Obligationen die Fristigkeitsstruktur der Zinssätze und damit den Zeitwert des Geldes repräsentieren. Im Gegensatz zu ausländischen Untersuchungen verunmöglichen das Volumen und die Liquidität des Obligationenmarktes eine Schätzung der Zinsstruktur mit den theoretisch als bonitätsmässig risikolos geltenden eidgenössischen Anleihen. Als Ersatz dienen die unkündbaren quellensteuerfreien Anleihen der internationalen Entwicklungsbanken mit Laufzeiten bis zu 13 Jahren.

Der Anwendungsbereich der geschätzten Fristigkeitsstruktur der Zinssätze ist recht vielfältig. Innerhalb des ausgewählten Schuldnersegments kann für alle nicht kündbaren Obligationen direkt ihr Gegenwartswert ermittelt und mit dem Marktpreis verglichen werden. Dies ist insbesondere auch im Bereich der Konditionenfestlegung bei Neuemissionen von Bedeutung. Der Vergleich anhand der Verfallrendite, die von der damit verbundenen Reinvestitionsannahme abhängt, fällt dahin. Ferner ist es möglich, den impliziten Marktpreis einer Kündigungsklausel bei den übrigen ausstehenden Anleihen des betrachteten Marktsegments als Residuum (Gegenwartswert der Anleihe ohne Kündigungsrecht, abzüglich Marktwert mit Kündigungsklausel) zu bestimmen und mit einem Optionspreisbildungsmodell zu vergleichen. Neben der Bewertung von Obligationen können anhand der empirisch ermittelten Zinsstruktur auch andere zinsabhängige Finanzinstrumente und -kontrakte (*Swaps*, *Futures*, *Optionen*) theoretisch korrekt bewertet werden.

Mit den geschätzten Fristigkeitsstrukturen der Zinssätze über mehrere Perioden ist es möglich, die geläufigen Zinstheorien (Erwartungstheorie, Liquiditätspräferenztheorie, Segmentierungstheorie) für die Schweiz empirisch zu überprüfen. Die aus den Kassazinssatzstrukturen geschätzten Zeitreihen sind mit der Theorie, welche von

der Existenz reiner Diskontobligationen ausgeht, kompatibel. So kann beispielsweise getestet werden, ob der mittlere Gesamtertrag, historisch gesehen, über alle Laufzeiten gleich hoch ausfiel oder ob die Investoren für längere Laufzeiten eine Liquiditäts- oder Risikoprämie erhielten. Daraus wäre das Ausmass der Risikoaversion und der Konsensus der individuellen Zeitpräferenz ersichtlich. Zusätzlich kann untersucht werden, ob die implizite Terminzinssatzstruktur als Prognose der künftigen kurzfristigen Zinssätze dienlich ist, wie es die reine Erwartungstheorie unterstellt. Es wäre auch möglich, die laufzeitabhängige durchschnittliche historische Risikoprämie für verschiedene Bonitätsklassen zu ermitteln. Ein wesentlicher Vorteil von Zeitreihen mit Kassazinssätzen gegenüber konventionellen Renditereihen liegt darin, dass ihre mittlere effektive Fälligkeit ("duration") bei gleicher Laufzeit nicht von der Couponhöhe und der Verfallrendite abhängig ist, sondern im Zeitablauf konstant ist und genau der Laufzeit entspricht. Diese Tatsache ist insbesondere bei der stochastischen Modellierung von Zinsveränderungen von Bedeutung.

Für die Zukunft wäre es wünschbar, wenn die Auswahl der Obligationen zur Schätzung der Zinsstruktur in der Schweiz grösser wäre. Dies könnte einerseits durch den Einbezug weiterer Schuldnerkategorien erreicht werden, wobei dann aufgrund der nicht homogenen Zusammensetzung eine Bonitätsprämie berücksichtigt werden müsste. Erfolgversprechender scheint jedoch eine iterative Schätzung unter Einbezug der kündbaren Obligationen der internationalen Entwicklungsbanken, wobei die Kündigungsoptionen mit einem Optionspreisbildungsmodell bewertet werden müssten.

Literatur

- Bussmann, J. (1989): Die Bestimmung der Zinsstruktur am deutschen Kapitalmarkt. Eine empirische Untersuchung für den Zeitraum 1978 bis 1986. *Kredit und Kapital* 22, 117–137.
- Capitelli, R. (1983): Die Zinsstruktur der Schweiz: Ein faktoranalytischer Ansatz im Frequenzbereich. Dissertation. Schriftenreihe des Instituts für Empirische Wirtschaftsforschung der Universität Zürich. Verlag Haag & Herchen, Frankfurt.
- Carleton, W.T./Cooper, I.A. (1976): Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance* 31, 1067–1083.
- Chambers, D.R./Carleton, W.T./Waldman, D.W. (1984): A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 19, 233–252.
- Lützenberger, R.H./Rolfo, J. (1984): An International Study of Tax Effects on Government Bonds. *The Journal of Finance* 39, 1–22.
- McCulloch, J.H. (1971): Measuring the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Business* 44, 19–31.
- McCulloch, J.H. (1975): The Tax-Adjusted Yield Curve. *The Journal of Finance* 30, 811–830.
- Schaefer, S.M. (1981): Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities. *The Economic Journal* 91, 415–438.
- Schaefer, S.M. (1982): Tax-Induced Clientele Effects in the Market for British Government Securities. *Journal of Financial Economics* 10, 121–159.
- Wolfe, P. (1959): The Simplex Method for Quadratic Programming. *Econometrica* 27, 382–398.

Zusammenfassung

Eine Methode zur Schätzung der Zinsstruktur in der Schweiz

Der Artikel stellt eine Methode zur Schätzung der Zinsstruktur in der Schweiz unter Berücksichtigung der besonderen Verhältnisse auf dem Kapitalmarkt dar. Mit einer Obligationenauswahl erstklassiger Schuldner, der internationalen Entwicklungsbanken, wird anhand eines quadratischen Optimierungsprogramms eine repräsentative Diskontfunktion geschätzt. Dabei wird die Fehlerquadratsumme zwischen den beobachteten und den geschätzten Gegenwartswerten der Stichprobe unter gewissen ökonomisch plausiblen Restriktionen minimiert.

Mit der geschätzten Zinsstruktur können die Anleihen des betrachteten Schuldnersegments anhand ihres Gegenwartswertes direkt mit ihrem Marktwert verglichen werden. Die weitem Anwendungsmöglichkeiten der geschätzten Zinsstruktur sind recht vielfältig und für die moderneren Methoden der Bewertung und Verwaltung von Obligationen-Portefeuilles geradezu eine Voraussetzung.

Résumé

Une méthode d'estimation de la structure des taux d'intérêt en Suisse

L'article expose une méthode d'estimation de la structure des taux d'intérêt en Suisse qui prend en compte les conditions particulières du marché des capitaux. Au moyen d'un programme d'optimisation quadratique, une fonction d'escompte représentative est estimée pour un choix d'obligations de débiteurs de premier ordre, les banques de développement internationales. La somme d'erreurs au carré entre les valeurs actuelles observées et estimées de l'échantillon est minimisée en tenant compte de certaines restrictions économiquement plausibles.

La structure estimée des taux d'intérêt permet de comparer directement, au moyen de leur valeur actuelle, les emprunts du segment de débiteurs considéré avec leur valeur de marché. L'éventail des applications possibles de la structure estimée des taux d'intérêt est large, et elle constitue une donnée de base pour les méthodes modernes d'évaluation et de gestion de portefeuilles obligataires.

Summary

A Method for Estimating the Term Structure of Interest Rates in Switzerland

This article presents a method for estimating the term structure of interest rates in Switzerland with regard to the special conditions in the capital market. With a selection of bonds from first class borrowers, the international development banks, a representative discount function is estimated by means of a quadratic optimisation program. In this the sum of square residuals between the observed and the estimated present values of the sample is minimised under certain economically plausible restrictions.

With an estimated term structure of interest rates, bonds from the borrower segment under consideration can, by means of their present values, be compared directly with their market value. Further possibilities for the use of the estimated interest rate structure abound and are practically a prerequisite for modern methods of evaluating and managing bond portfolios.