

Ein zweistufiges Verfahren zur Schätzung der Zinskurve

JÜRIG TOBLER*

EINLEITUNG

Die Zinskurve eines Kapitalmarktsegments, z.B. der Bundesobligationen, widerspiegelt die bonitätsgerechte Bewertung der Anleihen dieses Segments. Zinskurven bilden als solches die Grundlage zur Bewertung und Zinsrisikosteuerung von Anleihenportfolios. Da auf dem CHF-Kapitalmarkt praktisch keine Nullcouponanleihen ausstehend sind, können die segmentsspezifischen Zinskurven nicht direkt beobachtet werden¹. Es gilt deshalb, die benötigten Zinskurven aus den am Markt notierten Preisen von Couponanleihen zu bestimmen. Bei der Formulierung eines entsprechenden Modells macht man sich zunutze, dass die Anleihen eines Kapitalmarktsegments konsistent zueinander bewertet sein müssen, d.h. dass die Anleihenpreise in einem gleichgewichtigen Markt keine Arbitragemöglichkeiten zulassen dürfen.

Bislang gibt es für den schweizerischen Kapitalmarkt nur wenige Arbeiten, die sich mit der Bestimmung von Zinskurven auseinandersetzen; dazu gehören insbesondere BEER (1990), DEPPNER (1992) sowie TOBLER (1996). Die genannten Arbeiten beschränken sich auf Verfahren, die nur zuverlässige Resultate liefern, wenn eine relativ grosse Anzahl Anleihen verfügbar ist, die zudem regelmässig über das Laufzeitenspektrum verteilt sind. Diese Voraussetzungen sind jedoch auf dem CHF-Kapitalmarkt kaum je erfüllt. HELLER (1997) setzt das von NELSON/SIEGEL (1987) eingeführte Schätzverfahren für den CHF-Kapitalmarkt um. Dieses zeichnet sich u.a. dadurch aus, dass es auch anwendbar ist, wenn nur wenige Beobachtungen zur Verfügung stehen. Eigene Versuche haben jedoch gezeigt, dass dieses Verfahren bei den kurzen Laufzeiten zu einem völlig unrealistischen Verlauf der Zinskurve führen kann. Im vorliegenden Papier wird deshalb ein neues, zweistufiges Regressionsmodell für die Bestimmung von Zinskurven vorgeschlagen, das eine stabile und plausible Zinskurvenschätzung für alle Laufzeitenbereiche erlaubt. Dabei wird die Zinskurve bis zehn Jahre mit einer Basissplinefunktion angenähert, die sich durch eine hohe Flexibilität auszeichnet. Bei den längeren Laufzeiten wird eine Laguerreapproximation durchgeführt, die erstens eine stabile Schätzung der Zinssätze erlaubt, selbst wenn nur wenige Beobachtungspunkte vorliegen, und die zweitens eine Extrapolation der Zinskurve über die längste, am Markt ausstehende Anleihe

* Zürcher Kantonalbank, Volkswirtschaft und Risikocontrolling, Postfach, 8010 Zürich; e-mail: juerg.tobler@zkb.ch.

Ich bedanke mich bei einem anonymen Gutachter für wertvolle Hinweise und Anregungen. Für verbleibende Fehler bin ich verantwortlich.

1. Für den Swapmarkt kann die Zinskurve mit einem einfachen Bootstrapping-Verfahren ermittelt werden (siehe z.B. TOBLER (1996), S. 171 ff.).

hinaus zulässt. Das präsentierte Modell wird auf Daten des Bundesobligationen-Segments der Jahre 1990 bis 1997 angewendet.

Der Artikel ist im weiteren wie folgt aufgebaut: Im nächsten Abschnitt wird das traditionelle Splineverfahren zur Schätzung von Zinskurven sowie dessen arbitrage-theoretischer Hintergrund dargelegt. In Abschnitt zwei wird das zweistufige Regressionsmodell vorgestellt. Im dritten Abschnitt werden die im empirischen Teil verwendeten Daten beschrieben. In Abschnitt vier werden die Resultate der Zinskurvenschätzungen für Bundesobligationen präsentiert. Abschliessend werden in Abschnitt fünf einige Schlussfolgerungen gezogen.

1. DER TRADITIONELLE SPLINEANSATZ

Die Ermittlung des Barwerts einer in der Zukunft anfallenden Zahlung ist ein Grundproblem in der Finanzmarkttheorie. Dabei wird die Zahlung mit einem ihrer Fälligkeit und Bonität entsprechenden Zinssatz abdiskontiert. Die Zinskurve eines Bonitätssegments liefert in Form der Kassazinssätze sämtlicher Laufzeiten die dazu notwendigen Informationen. Kassazinssätze sind definiert als Verfallrenditen von Nullcouponanleihen, also Anleihen, die eine einmalige Auszahlung bei Fälligkeit erbringen. Ein Kassazinssatz bezieht sich somit auf eine bestimmte Laufzeit und eignet sich deshalb zum Abdiskontieren beliebiger Zahlungen der entsprechenden Fälligkeit und Bonität. Im Gegensatz dazu bezieht sich die Verfallrendite einer coupontragenden Anleihe auf mehrere Zeitpunkte, nämlich sämtliche Coupontermine, und hängt zudem von der Couponhöhe ab. Verfallrenditen von Couponanleihen sind also anleihe-spezifische Kennziffern und können nicht zum Abdiskontieren beliebiger Zahlungsströme herangezogen werden.

Da auf dem CHF-Kapitalmarkt fast ausschliesslich Couponanleihen ausstehen, sind die Zinskurven der verschiedenen Bonitätssegmente nicht direkt beobachtbar. Sie müssen aus den am Markt notierten Preisen von Couponanleihen bestimmt werden. Dazu ist ein Modell zu formulieren, wie Couponanleihen mit der – noch unbekannten – Zinskurve bewertet werden. Hierzu sind wiederum Annahmen bezüglich der Funktionsweise des Kapitalmarktes notwendig. Es wird, wie üblich, von einem sogenannten vollkommenen Kapitalmarkt ausgegangen, der wie folgt charakterisiert ist²:

1. Der Kapitalmarkt ist kompetitiv, d.h. alle Marktteilnehmer sind Preisnehmer.
2. Der Kapitalmarkt funktioniert reibungslos, d.h. es gibt keine Transaktionskosten, keine Steuern, keine Leerverkaufsbeschränkungen und keine anderweitigen Friktionen.

2. Ähnlich LASSAK (1993), S. 31. Theorie und Empirie von Zinskurvenmodellen, die in Abweichung der Annahme eines vollkommenen Kapitalmarktes Steuern und Transaktionskosten zulassen, werden ausführlich in TOBLER (1996) behandelt.

3. Alle Finanzaktiva sind beliebig teilbar.
4. Der Kapitalmarkt ist immer im Gleichgewicht, d.h. es gibt keine Handelsabschlüsse zu nicht gleichgewichtigen Preisen.
5. Alle Marktteilnehmer können zu einheitlichen Konditionen Geld aufnehmen oder anlegen.

Unter diesen Annahmen lässt sich zeigen, dass die Barwerte p_i aller n Anleihen eines Kapitalmarktsegments ihren beobachteten Marktpreisen m_i entsprechen müssen, damit ein Gleichgewicht herrscht (siehe TOBLER (1996), S. 19 ff.):

$$m_i = p_i = \sum_{j=1}^w z_{ij} \cdot \delta(t_j) \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Dabei ist der Barwert einer Anleihe als Summe der abdiskontierten, zukünftigen Auszahlungen definiert. z_{ij} bezeichnet die Auszahlung der i -ten Anleihe im Zeitpunkt t_j , $j = 1, \dots, w$, und w ist die Anzahl Zeitpunkte, an denen zumindest eine Anleihe eine Auszahlung macht; z_{ij} ist eine Couponzahlung plus allenfalls die Rückzahlung des Nennwerts, falls t_j ein Zinstermin der i -ten Anleihe ist und sonst Null. $\delta(t_j)$ ist der Diskontfaktor der Fälligkeit t_j , also der Preis einer Nullcouponanleihe mit Nennwert Eins und Verfall in t_j . Falls die Bedingung (1) nicht erfüllt ist, so sind durch den Kauf unterbewerteter und den Verkauf überbewerteter Anleihen Arbitragegewinne möglich. Darunter versteht man risikolose Gewinne, die ohne Einsatz eigener Mittel erzielbar sind. Die Nachfrage nach den entsprechenden Transaktionen wäre in einem vollkommenen Kapitalmarkt unendlich gross, so dass die beobachteten Marktpreise nicht gleichgewichtig sein könnten, d.h. zu keinem Ausgleich zwischen Angebot und Nachfrage führten. Ein solches Ungleichgewicht bzw. die unendlich grosse Nachfrage nach den Arbitragetransaktionen würde Preisanpassungen nach sich ziehen, welche die Arbitragemöglichkeiten zunichte machten. Die Marktkräfte wirken in einem vollkommenen Kapitalmarkt somit darauf hin, dass die Bedingung (1) immer erfüllt ist.

Mit der Diskontfaktorenfunktion $\delta(t_j)$, $j = 1, \dots, w$, ist die Zinskurve über die Beziehung

$$r(t_j) = - \frac{\ln \delta(t_j)}{t_j}$$

eindeutig bestimmt, wobei $r(t_j)$ den stetigen Kassazinssatz der Fristigkeit t_j angibt. Durch Einsetzen in (1)

$$m_i = p_i = \sum_{j=1}^w z_{ij} \cdot \delta(t_j) = \sum_{j=1}^w z_{ij} \cdot \exp(-r(t_j)t_j), \quad i = 1, \dots, n$$

findet sich der Zusammenhang zwischen den Kassazinssätzen $r(t_j)$ und den Anleihenpreisen m_i . Die Formulierung der No-Arbitragegleichung mit Diskontfaktoren hat den

Vorteil, dass sich ein lineares Problem ergibt, wogegen der Zusammenhang zwischen Anleihenpreisen und Kassazinssätzen nichtlinear ist.

Die in (1) postulierte Übereinstimmung zwischen Marktpreisen m_i und Barwerten p_i ist in der Realität nicht exakt, da der unterstellte vollkommene Kapitalmarkt nur ein vereinfachtes Abbild des tatsächlichen Preisfestsetzungsprozesses am Kapitalmarkt ist. Insbesondere die folgenden Punkte können zu Abweichungen zwischen den beobachteten Marktpreisen und den gemäss Modell bestimmten Barwerten führen (TOBLER [1996], S. 38 f.): 1) Gewinne und Verluste aus Anleihenengagements werden besteuert; 2) bei jeder Transaktion fallen Kosten in Form der Geld/Briefspanne, der Umsatzabgabe sowie von Händlergebühren an; 3) die Preisfestsetzung erfolgte vor Einführung der elektronischen Börse (EBS) im August 1996 diskret in Schritten von fünf Rappen; 4) die Anleihen werden nicht alle zum gleichen Zeitpunkt gehandelt, so dass deren Preise unterschiedliche Informationen widerspiegeln. Das Modell (1) wird deshalb um Abweichungen ε_i zwischen Marktpreisen und Barwerten der Anleihen erweitert:

$$m_i = p_i + \varepsilon_i = \sum_{j=1}^w z_{ij} \cdot \delta(t_j) + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

Die Preisabweichungen ε_i implizieren innerhalb des Modellrahmens die Möglichkeit, durch den Kauf von unterbewerteten und den gleichzeitigen Verkauf überbewerteter Anleihen Arbitragegewinne zu realisieren. Da diese jedoch eine Folge vereinfachender Modellannahmen sind, lassen sie sich in der Realität nicht in jedem Fall umsetzen. Durch die Einführung von Preisabweichungen ε_i wird aus dem No-Arbitragemodell ein Schätzmodell: Es sind unendlich viele verschiedene Diskontfaktorenfunktionen denkbar, welche die Gleichung (2) erfüllen; die wahren Diskontfaktoren können deshalb nur noch geschätzt werden. Dazu ist ein Schätzkriterium vorzugeben. Da die Marktkräfte – wie beschrieben – darauf hinwirken, Arbitragemöglichkeiten auszuschliessen, ist es naheliegend, die Diskontfaktoren so zu bestimmen, dass die resultierenden Preisabweichungen minimal sind (vgl. TOBLER [1996], S. 47 ff.).

Bei der Schätzung der w Diskontfaktoren aus der Bedingung (2) stellt sich das Problem, dass die Anzahl n der Anleihen in der Regel zu klein ist, um die Diskontfaktoren eindeutig zu identifizieren. Um dieses Identifikationsproblem zu lösen, werden die diskreten Diskontfaktoren $\delta(t_j)$, $j = 1, \dots, w$, mit einer stetigen Funktion, z.B. einem Polynom oder einer Splinefunktion, approximiert³:

$$\delta(t_j) \approx \phi(t_j; \gamma)$$

3. Die Verwendung von Approximationsfunktionen bei der Schätzung von Zinskurven geht auf McCULLOCH (1971) zurück.

$\phi(t; \underline{\gamma})$ bezeichnet die Approximationsfunktion, die nur von der Fälligkeit t sowie dem Parametervektor $\underline{\gamma} \in \mathcal{R}^k$ abhängig ist; (2) schreibt sich somit neu als

$$m_i = \sum_{j=1}^w z_{ij} \cdot \phi(t_j; \underline{\gamma}) + \tilde{\varepsilon}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2')$$

Die Preisabweichungen $\tilde{\varepsilon}_i$ bezeichnen die Differenzen zwischen den Marktpreisen und den approximierten Barwerten $\tilde{p}_i = \sum_{j=1}^w z_{ij} \phi(t_j; \underline{\gamma})$. Anstelle der w diskreten Diskontfaktoren sind die k Parameter der Approximationsfunktion zu schätzen, die eine stetige Diskontfaktorenfunktion beschreibt. k kann immer kleiner als n gewählt werden, so dass die Identifikation des Parametervektors $\underline{\gamma}$ sichergestellt ist.

Die Wahl der Approximationsfunktion ist von entscheidender Bedeutung: Je nachdem mit welcher Funktion die Diskontfaktoren angenähert werden, resultiert eine andere geschätzte Zinskurve. An die Approximationsfunktion werden insbesondere zwei Anforderungen gestellt: Erstens soll sie sich durch eine hohe Flexibilität auszeichnen, damit die beobachteten Anleihenpreise möglichst gut erklärt werden können. Zweitens soll sie zu einem möglichst glatten und stabilen Verlauf der Diskontfaktorenfunktion führen. Diese Anforderung ergibt sich daraus, dass erstens starke Schwingungen in der Approximationsfunktion ein Ansteigen der Diskontfaktorenfunktion zur Folge haben können, was Arbitragemöglichkeiten implizierte; zweitens schlagen sich selbst relativ geringe Schwingungen der Diskontfaktorenfunktion in starken Ausschlägen bei den impliziten Terminzinssätzen nieder (SHEA [1984]). Die Erfahrung zeigt, dass etwa einfache Polynome der Form

$$\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_{k-1} t^{k-1}$$

zwar sehr flexibel sind, aber bei hohen Ordnungen k zu extremen Schwingungen neigen⁴. Einen guten Kompromiss scheinen Splinefunktionen darzustellen⁵. Dabei wird das Restlaufzeitspektrum in mehrere Intervalle unterteilt und in jedem Intervall separat ein einfaches Polynom geschätzt; an den inneren Intervallgrenzen werden die beiden jeweils aufeinandertreffenden Polynome dergestalt restringiert, dass sie im Funktionswert sowie den ersten beiden Ableitungen übereinstimmen, wodurch ein glatter Verlauf der Splinefunktion sichergestellt ist. Splinefunktionen weisen den Vorteil auf, dass sie sich dank der intervallweisen Schätzung durch eine hohe Flexibilität auszeichnen, ohne diese durch eine hohe Ordnung, verbunden mit starken Schwingungen, erkaufen zu müssen⁶. Bei der Verwendung von Splinefunktionen ist jedoch in zweierlei Hinsicht Vorsicht geboten:

1. Durch das intervallweise Schätzen lassen sich Schwingungen an den beiden äusseren Rändern des Schätzbereichs, also bei den ganz kurzen Laufzeiten sowie vor der läng-

4. Siehe etwa STEELEY (1991).

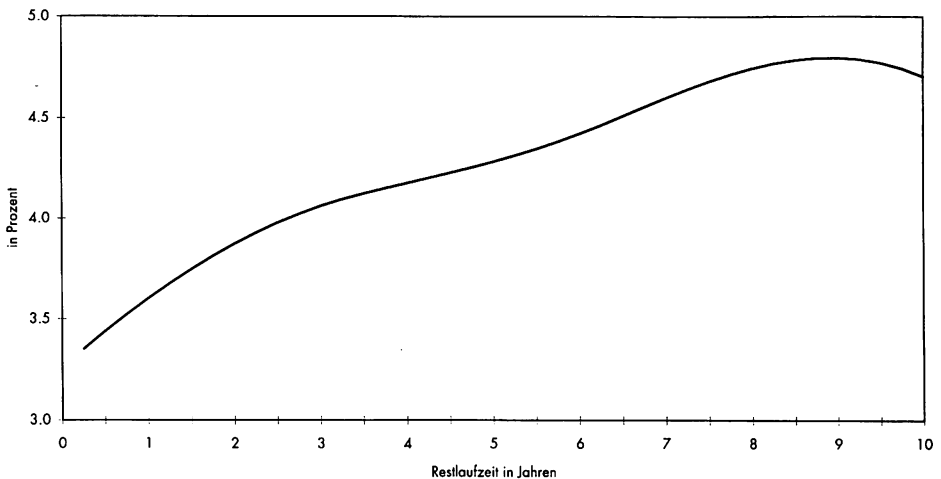
5. Eine ausführliche Diskussion von Splinefunktionen findet sich in Anhang 2.

6. Für einen Vergleich von einfachen Polynomen mit Splinefunktionen siehe DEBOOR (1978), S. 22 ff.

sten Laufzeit – in der Regel dem Zehnjahressatz –, nicht vermeiden (TOBLER [1996], S. 71). Das Ausschwingen der Zinskurve gegen den Zehnjahressatz hin geht beispielhaft aus Abbildung 1 hervor, in der die mit einem Splineverfahren geschätzte Bundesobligationen-Zinskurve für den 15. Juni 1995 wiedergegeben ist.

2. Aufgrund der hohen Flexibilität der Splinefunktion müssen für eine stabile Schätzung relativ viele Datenpunkte zur Verfügung stehen. Auf dem CHF-Kapitalmarkt ist diese Forderung bestenfalls für Laufzeiten bis zehn Jahre erfüllt. Bei den längeren Laufzeiten sind dagegen in der Regel nur wenige Anleihen ausstehend, mit teilweise grossen Laufzeitenunterschieden. Für diese Situation erweisen sich Splinefunktionen als ungeeignet.

Abbildung 1: Mit Splineverfahren geschätzte Bundesobligationen-Zinskurve vom 15. 6. 1995



Im folgenden wird ein zweistufiges Verfahren zur Schätzung von Zinskurven vorgeschlagen. Dabei werden die Diskontfaktoren bis zehn Jahre mit einer Splinefunktion angenähert, die jedoch Restriktionen unterworfen wird, mit welchen den Problemen an den beiden äusseren Rändern des Schätzbereichs Rechnung getragen wird. Die über zehnjährigen Diskontfaktoren werden dagegen mit einer stabilen Lagerreapproximation bestimmt, die auch eine Extrapolation der Zinskurve über die längste sich im Umlauf befindende Anleihe hinaus erlaubt. Dabei wird zuerst die Lagerreapproximation vorgenommen und in einem zweiten Schritt die restringierte Splineschätzung.

2. EIN ZWEISTUFIGES REGRESSIONSMODELL

Um die mit den üblichen Splineansätzen verbundenen Probleme zu umgehen, führen wir die Zinskurvenschätzung in zwei Stufen durch. Im ersten Schritt wird über alle Laufzeiten bis zur längsten ausstehenden Anleihe eine Lagerreapproximation durchgeführt; von den in dieser Stufe bestimmten Diskontfaktoren werden letztlich jedoch nur jene für Laufzeiten von über 10 Jahren benutzt⁷. Konkret wird in Modell (2') für die Approximationsfunktion der Diskontfaktoren folgende Funktion eingesetzt (der Subskript Eins verweist auf die Approximation in der ersten Schätzstufe):

$$\phi_1(t; \underline{\beta}) = \exp \left\{ -(\beta_2 + \beta_3)\beta_4 - \beta_1 t + [(\beta_2 + \beta_3)\beta_4 + \beta_3 t] \exp \left(-\frac{t}{\beta_4} \right) \right\} \quad t \geq 0 \quad (3)$$

Wie in Anhang 1 ausgeführt wird, beruht diese Funktion auf einer Approximation der instantanen impliziten Terminzinssätze durch ein Lagerrepolynom, ein Vorgehen, das auf die Arbeit von NELSON/SIEGEL (1987) zurückgeht; auf (3) wird deshalb als Lagerreapproximation verwiesen. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass die Kassazinskurve für steigende Laufzeiten zu einem endlichen Wert, nämlich β_1 , konvergiert. Damit eignet sich die Lagerreapproximation auch zur Extrapolation der Zinskurve in Laufzeitenbereiche, in denen keine Anleihen vorhanden sind. In dieser ersten Stufe wird also dem Problem der wenigen Datenpunkte bei den Laufzeiten über zehn Jahre Rechnung getragen. Das Schätzmodell der ersten Stufe ergibt sich durch Einsetzen von (3) in (2'). Die Parameter $\beta_1, \dots, \beta_4$ der Lagerreapproximation werden so bestimmt, dass die Summe der gewichteten, quadrierten Preisabweichungen $\tilde{\varepsilon}_i$ minimal ist. Gewichtet werden die quadrierten Preisabweichungen der einzelnen Anleihen mit deren Restlaufzeiten τ_i , weil in der ersten Stufe die Schätzgenauigkeit am langen Ende der Zinskurve im Vordergrund steht. Das Schätzmodell lautet somit:

$$\min_{\beta_1, \dots, \beta_4} \sum_{i=1}^n \tau_i \tilde{\varepsilon}_i^2 \quad (4)$$

$$\tilde{\varepsilon}_i = m_i - \sum_{j=1}^w z_{ij} \cdot \exp \left\{ -(\beta_2 + \beta_3)\beta_4 - \beta_1 t_j + [(\beta_2 + \beta_3)\beta_4 + \beta_3 t_j] \exp \left(-\frac{t_j}{\beta_4} \right) \right\}$$

Es handelt sich hierbei um ein in den Parametern $\beta_1, \dots, \beta_4$ nichtlineares Problem. Die Parameterschätzung ist deshalb mit einer nichtlinearen Regressionsmethode vorzunehmen. Von den so bestimmten Diskontfaktoren werden nur jene mit Laufzeiten über zehn Jahre

7. Die Begrenzung der ersten Stufe auf Laufzeiten von mehr als zehn Jahren gilt für die in Abschnitt 4 vorgenommenen Zinskurvenschätzungen für Bundesobligationen. Sie ist der jeweiligen Datenverfügbarkeit anzupassen.

verwendet. Die Diskontfaktoren der kürzeren Laufzeiten resultieren aus der im folgenden beschriebenen, zweiten Schätzstufe.

Im zweiten Schritt werden die Diskontfaktoren bis zehn Jahre mittels einer restrinierten Splineapproximation geschätzt. Dabei werden Restriktionen an die Parameter der Splinefunktion formuliert, die erstens das Ausschwingen bei den kürzesten und längsten Laufzeiten verhindern und zweitens einen glatten Übergang zur Laguerreapproximation sicherstellen. Ausgangspunkt der zweiten Schätzstufe ist eine Unterteilung des Laufzeitepektrums bis zehn Jahre in drei Intervalle: 0 bis 3 Jahre, 3 bis 6 Jahre sowie 6 bis zehn Jahre⁸. Darauf basierend wird eine kubische Splinefunktion definiert, mit der die Diskontfaktoren bis zehn Jahre approximiert werden. In Modell (2') wird also für die Approximationsfunktion eine Splinefunktion eingesetzt (der Subskript weist auf die in der zweiten Stufe vorgenommene Approximation der Diskontfaktoren hin):

$$\phi_2(t; \underline{\alpha}) = \sum_{a=1}^6 \alpha_a N_{a,4,\xi}(t) \quad 0 \leq t \leq 10 \quad (5)$$

Die Splinefunktion wird dabei als Linearkombination von sechs kubischen Basissplinefunktionen $N_{a,4,\xi}(t)$ dargestellt⁹. Diese spannen für die drei angegebenen Laufzeitenintervalle den Raum aller kubischen Splinefunktionen auf. Eine ausführliche Beschreibung von Basissplinefunktionen findet sich in Anhang 2. Anstelle der diskreten Diskontfaktoren sind mit dieser Approximation die sechs Koeffizienten α_a der Linearkombination von Basissplinefunktionen zu schätzen.

Die Splinefunktion (5) wird für die Schätzung der Diskontfaktoren mit Laufzeiten bis zehn Jahre verschiedenen Restriktionen unterworfen. Zunächst wird sie für die Laufzeit Null auf Eins restriniert, damit sich keine Arbitragemöglichkeiten durch bloße Kassahaltung ergeben (TOBLER [1996], S. 33). Dadurch werden Schwingungen der Splinefunktion am kurzen Ende der Diskontfaktorenfunktion weitgehend verhindert. Drei weitere Restriktionen werden bei der Laufzeit $t = 10$ Jahre angebracht: Der Funktionswert sowie die ersten beiden Ableitungen der Splinefunktion müssen mit den entsprechenden Werten aus der ersten Schätzstufe übereinstimmen. Damit wird das Ausschwingen der Splinefunktion in diesem Laufzeitenbereich weitgehend unterbunden und gleichzeitig ein glatter Übergang von der Spline- zur Laguerreapproximation sichergestellt. Die vier Restriktionen lauten zusammengefasst:

8. Alternativ zur fixen Vorgabe der Intervalle können diese auch variabel gesetzt werden; ein entsprechendes Verfahren schlug etwa McCULLOCH (1971) vor. Die hier gewählten, fixen Intervalle beziehen sich auf die empirische Untersuchung in Abschnitt 4; sie sind der jeweiligen Datenverfügbarkeit anzupassen.
9. Basissplinefunktionen werden z.B. von STEELEY (1991) zur Schätzung von Zinskurven verwendet.

$$\begin{aligned}
 \text{R1: } & \phi_2(0; \underline{\alpha}) = 1 \\
 \text{R2: } & \phi_2(10; \underline{\alpha}) = \phi_1(10; \underline{\beta}) \\
 \text{R3: } & \left. \frac{d\phi_2(t; \underline{\alpha})}{dt} \right|_{t=10} = \left. \frac{d\phi_1(t; \underline{\beta})}{dt} \right|_{t=10} \\
 \text{R4: } & \left. \frac{d^2\phi_2(t; \underline{\alpha})}{dt^2} \right|_{t=10} = \left. \frac{d^2\phi_1(t; \underline{\beta})}{dt^2} \right|_{t=10}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Die Werte auf der rechten Seite der Restriktionen R2 bis R4 ergeben sich durch Einsetzen der in der ersten Stufe geschätzten Parameter $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_4$ in (3) bzw. in die ersten beiden Ableitungen von (3) an der Stelle $t = 10$. Diese drei Werte sowie die Eins aus der Restriktion R1 werden in den Vektor $\underline{q} \in \mathbb{R}^4$ geschrieben. Die an $t = 0$ bzw. $t = 10$ evaluierten sechs Basissplinefunktionen und abgeleiteten Basissplinefunktionen auf der linken Seite der vier Restriktionen werden in der Matrix $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ zusammengefasst. Bezeichnet $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^6$ den Vektor der zu schätzenden Koeffizienten der Linearkombination von Basissplinefunktionen, so schreiben sich die Restriktionen (6) in Matrizenform als

$$\underline{Q} \cdot \underline{\alpha} = \underline{q}. \tag{6'}$$

Für eine detaillierte Darstellung dieser Restriktionen wird auf Anhang 3 verwiesen. Das Schätzmodell für die Diskontfaktoren in der zweiten Stufe ergibt sich durch Einsetzen der Splineapproximation (5) in (2'), die Vorgabe der Summe der quadrierten Preisabweichungen als Minimierungskriterium sowie die Restriktionen (6'):

$$\begin{aligned}
 \min_{\underline{\alpha}} & \tilde{\underline{\varepsilon}}^T \tilde{\underline{\varepsilon}} \\
 \tilde{\underline{\varepsilon}} &= \underline{m} - (\underline{Z}\underline{N})\underline{\alpha} \\
 \underline{Q} \cdot \underline{\alpha} &= \underline{q}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei gilt folgende Notation: $\tilde{\underline{\varepsilon}} \in \mathbb{R}^n$ enthält die Preisabweichungen der n Anleihen, $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$ deren Marktpreise und die Elemente z_{ij} der Matrix

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1j} & \dots & z_{1w} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{i1} & & z_{ij} & & z_{iw} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nj} & \dots & z_{nw} \end{pmatrix}$$

sind die Auszahlungen der n Anleihen. Die Elemente von $\underline{N} \in \mathbb{R}^{w \times 6}$ sind die an den Zinstermen $t_j, j = 1, \dots, w$, evaluierten sechs Basissplinefunktionen. Da die Anleihenpreise $\underline{m}$

gemäss (7) linear in den zu schätzenden Splinekoeffizienten $\underline{\alpha}$ sind und die vier in (6') formulierten Restriktionen ebenfalls linear sind, kann $\underline{\alpha}$ mit dem restringierten Kleinstquadratverfahren geschätzt werden (vgl. GREENE [1993], S. 205); danach ergeben sich die in einem Kleinstquadratsinne optimalen Parameter $\hat{\underline{\alpha}}$ als

$$\hat{\underline{\alpha}} = \underline{\alpha}^* - [(\underline{Z}\underline{N})^T(\underline{Z}\underline{N})]^{-1}\underline{Q}^T\{\underline{Q}[(\underline{Z}\underline{N})^T(\underline{Z}\underline{N})]^{-1}\underline{Q}^T\}^{-1}(\underline{Q}\underline{\alpha}^* - \underline{q}) \quad (8)$$

wobei

$$\underline{\alpha}^* = [(\underline{Z}\underline{N})^T(\underline{Z}\underline{N})]^{-1}(\underline{Z}\underline{N})^T \underline{m}$$

der unter Vernachlässigung der Restriktionen (6') bestimmte, gewöhnliche Kleinstquadratschätzer ist.

Mit dem zweistufigen Vorgehen sind zusammenfassend folgende Vorteile verbunden:

- Die Diskontfaktoren der über zehnjährigen Laufzeiten, wo nur wenige Datenpunkte zur Verfügung stehen, werden mit einer stabilen Funktion approximiert.
- Die Verwendung einer stabilen Funktion am langen Ende der Zinskurve ermöglicht es, diese über die beobachteten Laufzeiten hinaus zu extrapolieren.
- Der Einsatz einer Splinefunktion für die Laufzeiten bis zehn Jahre erlaubt in diesem Laufzeitenbereich eine flexible Schätzung.
- Die Restringierung der Splinefunktion verhindert, dass diese bei den ganz kurzen Laufzeiten sowie gegen den Zehnjahressatz hin ausschwingt.

3. DATEN

Mit dem im letzten Abschnitt vorgestellten, zweistufigen Schätzverfahren werden aus Preisen von Bundesobligationen Zinskurven geschätzt. Die Untersuchung bezieht sich auf die Zeitperiode Juli 1990 bis Dezember 1997. Monatlich wurden die vier Kurse «Letztbezahlter Kurs», «Geldkurs», «Briefkurs» und «Historischer letztbezahlter Kurs» aller Bundesobligationen erfasst¹⁰. Monatlicher Stichtag ist der 15. oder der nächstgelegene Handelstag. Insgesamt stehen somit Preisdaten von 90 Stichtagen zur Verfügung. Unter den vier vorgenannten Kursen ist folgendes zu verstehen: Der «Letztbezahlte Kurs» ist der letzte, am Stichtag zustande gekommene Kurs eines Handelsabschlusses (Kauf oder Verkauf). Der «Historisch letztbezahlte Kurs» bezeichnet den letzten, vor dem Stichtag notierten «Letztbezahlten Kurs»; dieser kann am Vortag oder vor mehreren Handelstagen zustande gekommen sein. «Geld-» und «Briefkurs» sind die von den Börsenhändlern gestellten Kauf- und Verkaufspreise. Alle Kursnotizen verstehen sich ohne

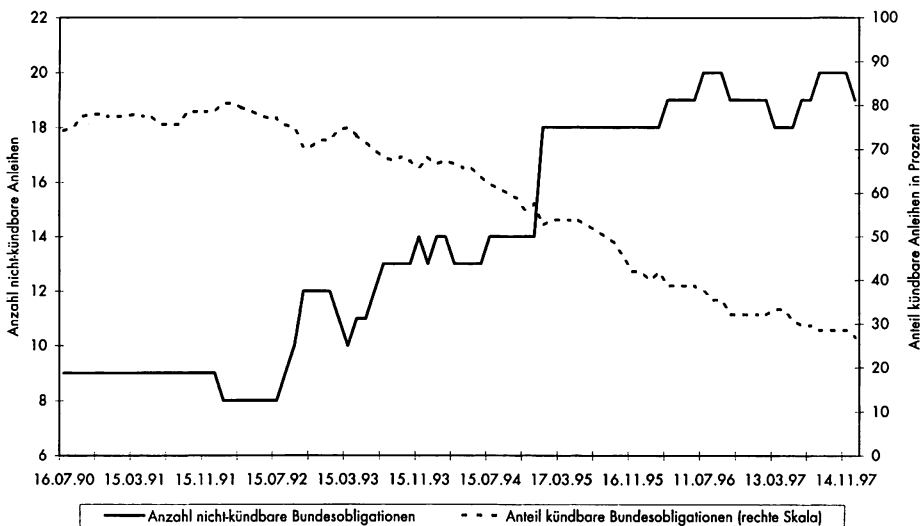
10. Datenquelle: Kursblätter der Zürcher Börse für die Daten von Juli 1990 bis Dezember 1994; die Daten der späteren Stichtage stammen von Reuters.

Marchzinsen, d.h. ohne den seit dem letzten Zinstermin aufgelaufenen Coupon. Ein Marktpreis m_i der i -ten Anleihe ergibt sich deshalb wie folgt aus einer Kursnotiz $\bar{m}_i$:

$$m_i = \bar{m}_i + \frac{v_i \cdot c_i}{360}$$

Dabei bezeichnet v_i die Anzahl Tage seit dem letzten Coupontermin und c_i die Couponrate der i -ten Anleihe. Im Rahmen des Regressionsmodells gibt es einen einheitlichen Preis für Käufe und Verkäufe. Für die Umsetzung des Modells wird deshalb aus den vier an der Börse notierten Preisen ein fiktiver, einheitlicher Marktpreis definiert: Liegt ein «Geld-» und «Briefkurs» vor, so gilt der Mittelkurs als Marktpreis. Andernfalls wird der «Letztbezahlte Kurs» als Marktpreis genommen. An dritter Stelle wird auf den «Geld-» oder «Briefkurs» zurückgegriffen, je nachdem ob auf der Kauf- oder Verkaufseite ein Kurs gestellt ist. Liegt keiner dieser drei Kurse vor, so gilt der «Historisch letztbezahlte Kurs» als Marktpreis. Bei jeder Variante wird dabei die oben beschriebene Korrektur um die Marchzinsen vorgenommen.

Abbildung 2: Hoher Anteil kündbarer Bundesobligationen



Für die Schätzung der Zinskurven werden nicht alle Bundesobligationen verwendet. Anleihen mit einer Laufzeit unter einem Monat werden ausgeschlossen, da diese angesichts hoher Transaktionskosten praktisch nicht mehr gehandelt werden. Problematisch ist die Behandlung kündbarer Bundesobligationen. Mit dem hier vorgestellten Modell kann die

implizit in diesen Anleihen enthaltene Option (Kündigungsklausel) nicht finanzmarkttheoretisch korrekt bewertet werden¹¹. Aus diesem Grund wäre es naheliegend, die kündbaren Anleihen von der Schätzung auszuschliessen. Zu Beginn der Stichprobe, während der bis Herbst 1992 dauernden Hochzinsphase, waren jedoch knapp 80% der ausstehenden Bundesobligationen kündbar (Abbildung 2); aus den zeitweise bloss acht nicht-kündbaren Anleihen können keine zuverlässigen Zinskurven geschätzt werden. Obwohl die Bedeutung der kündbaren Anleihen infolge des sinkenden Zinsniveaus ständig abnahm und am Ende der Stichprobe weniger als 30% der Bundesobligationen kündbar waren, werden deshalb die kündbaren Anleihen für die Zinskurvenschätzung verwendet. Um unter Einbezug der kündbaren Anleihen mit dem gewählten Modell Zinskurven schätzen zu können, wird auf das sogenannte Yield-to-Worst-Kriterium zurückgegriffen. Mit diesem werden die von der zukünftigen Zinsentwicklung abhängigen Auszahlungen der kündbaren Anleihen in fixe Auszahlungen transformiert. Dabei wird die Rendite auf jeden Kündigungstermin sowie auf Endverfall berechnet; jener Rückzahlungstermin, der auf die geringste Rendite führt, wird als Verfallzeitpunkt der kündbaren Anleihe definiert. Die so festgelegte Laufzeit wird als fix unterstellt. Hinter diesem Kriterium steht folgende Überlegung: Die Eidgenossenschaft kündigt die Anleihe an jenem Termin, an dem die Refinanzierungskosten am tiefsten sind. Dabei werden die Renditen auf die verschiedenen Rückzahlungstermine als Prognose für die dannzumal zu gewärtigenden Refinanzierungskosten genommen. Diese Vorgehensweise ist auf dem CHF-Kapitalmarkt weit verbreitet. So bezieht die Schweizerische Nationalbank mit diesem Vorgehen kündbare Anleihen in die täglich veröffentlichte Durchschnittsrendite der Bundesobligationen mit ein (SCHWEIZERISCHE NATIONALBANK [1983]). Genauso verfährt die Schweizer Börse bei der Berechnung des Swiss Bond Indexes, mit der Begründung, dieses Verfahren habe «in der Schweiz breite Akzeptanz gefunden» (SCHWEIZER BÖRSE [1994]). Die bislang für den CHF-Kapitalmarkt vorliegenden empirischen Resultate bezüglich der Bewertung kündbarer Anleihen mit Optionspreismodellen sind zudem wenig überzeugend. Der Befund von LEITHNER (1992), S. 193 f., ist, dass die Kündigungsklauseln systematisch unterbewertet sind. GIBSON-ASNER (1990) und BÜTTLER (1995) finden sogar negative Werte für die Kündigungsklauseln. Möglicherweise werden die Marktpreise kündbarer Anleihen mit dem Yield-to-Worst-Kriterium also besser erklärt als mit einem Optionspreismodell; die Verwendung des aus finanzmarkttheoretischer Sicht inkorrekten Yield-to-Worst-Kriterium wird deshalb als vertretbar erachtet. Um jedoch grobe Fehlbewertungen kündbarer Anleihen zu vermeiden, werden jene von den Zinskurvenschätzungen ausgeschlossen, die innerhalb von sechs Monaten einen Kündigungstermin aufweisen, die also diesbezüglich am stärksten exponiert sind. Zudem werden die beiden Valoren 15712 sowie 15718 in den Schätzungen nicht berücksichtigt. Sie verfallen im Jahr 2011 bzw. 2012 und sind jährlich ab 2001 bzw. 2002 künd-

11. Für eine Diskussion der Bewertung kündbarer Anleihen mit Optionspreismodellen sei auf BÜTTLER (1995) verwiesen.

bar. Es zeigt sich, dass das Yield-to-Worst-Kriterium bei dieser grossen Anzahl von Kündigungsterminen keine verlässlichen Resultate liefert (vgl. WALDER [1997]).

Aus Abbildung 3 geht hervor, wie die Anleihen über das Laufzeiteinspektrum bis zwanzig Jahre verteilt sind. Die grosse Mehrheit der Anleihen weist kürzere Laufzeiten als zehn Jahre auf, wogegen im Bereich von zehn bis zwanzig Jahren nur sehr wenige Anleihen ausstehend sind; Anleihen mit einer Laufzeit von über zwanzig Jahren gibt es in der Stichprobe nicht. Es tritt jedoch an fast allen Stichtagen mindestens eine Anleihe mit einer Laufzeit von mehr als zehn Jahren auf (siehe Tabelle 1); nur an 9 der insgesamt 90 betrachteten Stichtage ist die Laufzeit der längsten ausstehenden Anleihe kleiner als zehn Jahre. Ein Verfahren zur Schätzung der Zinskurve, das der geringen Anzahl Beobachtungen bei den über zehnjährigen Laufzeiten Rechnung trägt, ist deshalb von grosser Bedeutung.

Abbildung 3: Anzahl Anleihen mit unter bzw. über zehnjähriger Restlaufzeit

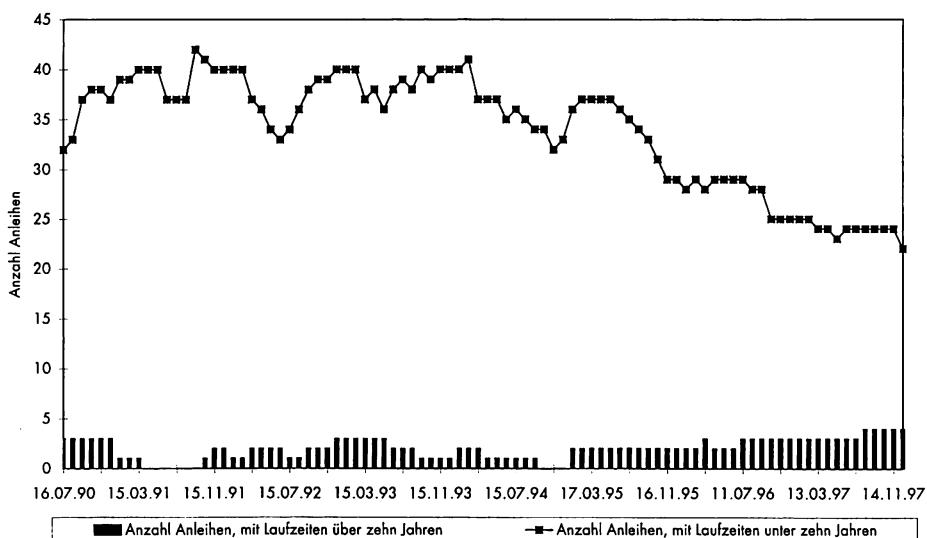


Tabelle 1: Die längsten Restlaufzeiten

Laufzeit der längsten Anleihe	Anzahl Stichtage
unter 10 Jahre	9
zwischen 10 und 15 Jahren	45
zwischen 15 und 20 Jahren	36
über 20 Jahre	0
Total	90

4. SCHÄTZRESULTATE

Aus den im letzten Abschnitt beschriebenen Preisen von Bundesobligationen wird für jeden der 90 Stichtage mit dem zweistufigen Verfahren eine Zinskurve geschätzt. An jedem Stichtag wird die mittlere absolute Preisabweichung MAD berechnet:

$$\text{MAD} = \frac{\sum_{i=1}^n |\tilde{\varepsilon}_i|}{n}.$$

Die Dimension dieser Grösse ist Franken, weshalb sie direkt mit den beobachteten Preisen vergleichbar ist; dies ist der Grund, warum hier nicht auf die mittleren quadrierten Preisabweichungen, die in der Regression minimiert werden, abgestellt wird. Über die gesamte Stichprobe von 90 Handelstagen wird der minimale, der durchschnittliche und der maximale MAD bestimmt sowie die Standardabweichung berechnet. Diese Werte sind in Spalte 1 von Tabelle 2 zusammengestellt. Daraus ist ersichtlich, dass das zweistufige Schätzverfahren im Schnitt auf eine mittlere absolute Preisabweichung von 31 Rappen führt. Dies ist deutlich mehr als die bei den liquidesten Bundesobligationen beobachtbaren Geld/Briefspannen von unter 10 Rappen. Es ist jedoch zu beachten, dass die festgestellten mittleren absoluten Preisabweichungen einen fallenden Trend aufweisen; im Verlauf des Jahres 1997 sind sie deutlich unter 20 Rappen gesunken (Abbildung 4). Eine wesentliche Ursache dafür dürfte eine gestiegene Liquidität auf dem Markt für Bundesobligationen sein, die eine raschere Informationsverarbeitung und damit konsistentere Preise nach sich zog. Die folgenden Aspekte dürften zur gestiegenen Liquidität beigetragen haben: 1) Mit der zunehmenden Staatsverschuldung nahmen die Emissionsvolumina ständig zu. 2) Die zunehmende Bedeutung von Derivaten, insbesondere des CONF-Futures, führte zu einem regeren Handel in den zugrundeliegenden Bundesobligationen. 3) Ausländische Investoren wurden u.a. aufgrund der «safe haven»-Funktion des Schweizer Frankens immer aktiver. Abgesehen von der gestiegenen Liquidität beschleunigte sich die Informationsverarbeitung auch aufgrund einer Professionalisierung des Handels, welche durch das verstärkte Auftreten ausländischer Investoren vorangetrieben wurde¹². Ebenfalls zum sinkenden Trend der Preisabweichungen beigetragen haben dürfte die im Verlauf des betrachteten Zeitraumes gesunkene Bedeutung kündbarer Anleihen. Der kleinste MAD in der betrachteten Stichprobe beträgt 7 Rappen und trat im November 1997 auf (Tabelle 2, Spalte 1). Im Juni 1991 war mit 51 Rappen der grösste MAD zu verzeichnen. Die in Form der Standardabweichung gemessene Schwankungsbreite der MADs um den Mittelwert ist mit 9 Rappen relativ gering.

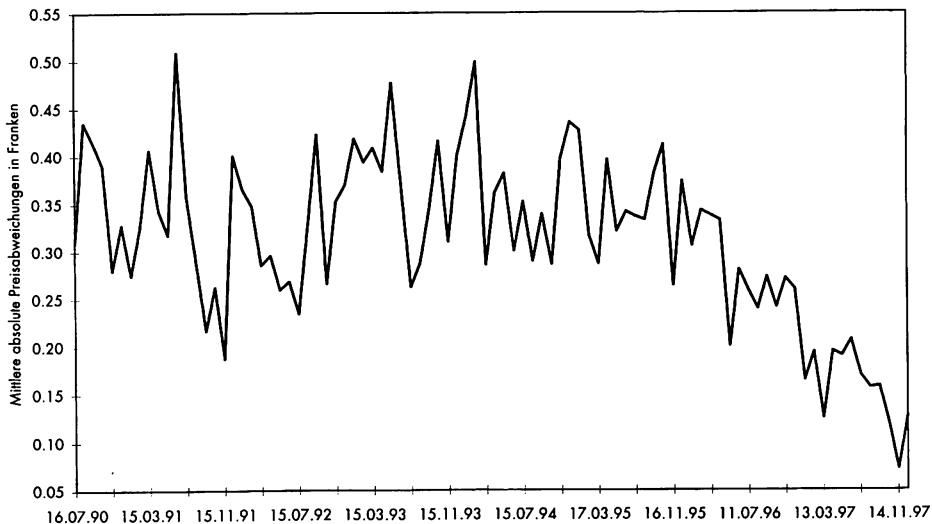
12. TOBLER (1997)

Tabelle 2: Mittlere absolute Preisfehler (MAD) in Rappen

	Restringierter B-Spline/ Laguerreapproximation			B-Spline	Laguerre- approximation
	Alle Laufzeiten	Laufzeiten unter 10 Jahren	Laufzeiten über 10 Jahren	Laufzeiten unter 10 Jahren	Alle Laufzeiten
	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4	Spalte 5
Minimum	7.24	7.55	2.69	7.44	7.41
Mittelwert	31.22	31.04	30.38	28.97	32.39
Maximum	50.87	50.87	72.91	50.79	52.29
Standardabweichung	8.94	9.68	17.08	10.09	8.82

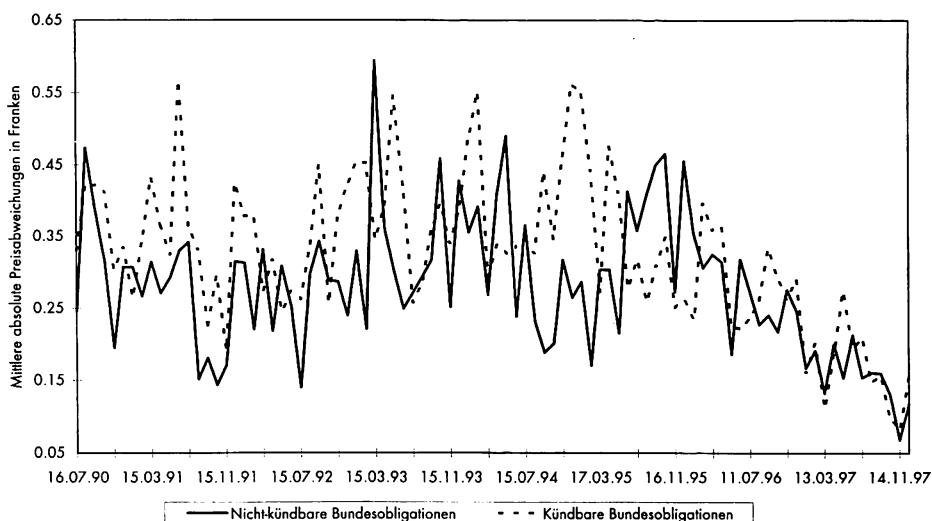
Tabelle 3: Mittlere absolute Preisfehler (MAD) bei nicht-kündbaren und kündbaren Bundesobligationen in Rappen

	Alle Anleihen	Nicht-kündbare Anleihen	Kündbare Anleihen
Minimum	7.24	6.84	8.24
Mittelwert	31.22	28.07	32.66
Maximum	50.87	59.43	56.63
Standardabweichung	8.94	9.63	10.51

Abbildung 4: Entwicklung der mittleren absoluten Preisabweichungen

Um den Einfluss der kündbaren Anleihen auf die Schätzqualität zu untersuchen, wurden an jedem Stichtag die Preisabweichungen für die nicht-kündbaren sowie die kündbaren Anleihen separat bestimmt. Wie aus Tabelle 3 hervorgeht, weisen die kündbaren Anleihen im Schnitt über die ganze Stichprobe einen um gut 4 Rappen höheren MAD auf. Dies ist bei einem durchschnittlichen Niveau der MADs von rund 30 Rappen ein geringer Unterschied. In Abbildung 5 ist der Verlauf der MADs für nicht-kündbare und kündbare Bundesobligationen wiedergegeben. An 58 von den insgesamt 90 Stichtagen weisen die kündbaren Anleihen höhere Preisabweichungen auf als die nicht-kündbaren. Seit Herbst 1996 sind zwischen den Preisabweichungen der nicht-kündbaren und der kündbaren Anleihen keine wesentlichen Unterschiede mehr auszumachen. Aufgrund des sehr tiefen Zinsniveaus in diesem Zeitraum ist eine vorzeitige Rückzahlung wahrscheinlich. Mit anderen Worten sind die Kündigungsoptionen tief im Geld und die kündbaren Anleihen sind nahezu gleichviel wert wie nicht-kündbare Anleihen mit gleichem Coupon und Verfall am nächsten Kündigungstermin; das Yield-to-Worst-Kriterium liefert deshalb ähnliche Werte wie ein Optionspreismodell.

Abbildung 5:
Mittlere absolute Preisabweichungen bei nicht-kündbaren und kündbaren Bundesobligationen



Im folgenden wird die Qualität der Zinskurvenschätzungen für die Laufzeiten unter bzw. über zehn Jahren analysiert. Dazu werden MADs für unter und über zehnjährige Anleihen berechnet (Spalten 2 und 3 in Tabelle 2). Die mittleren absoluten Preisabweichungen

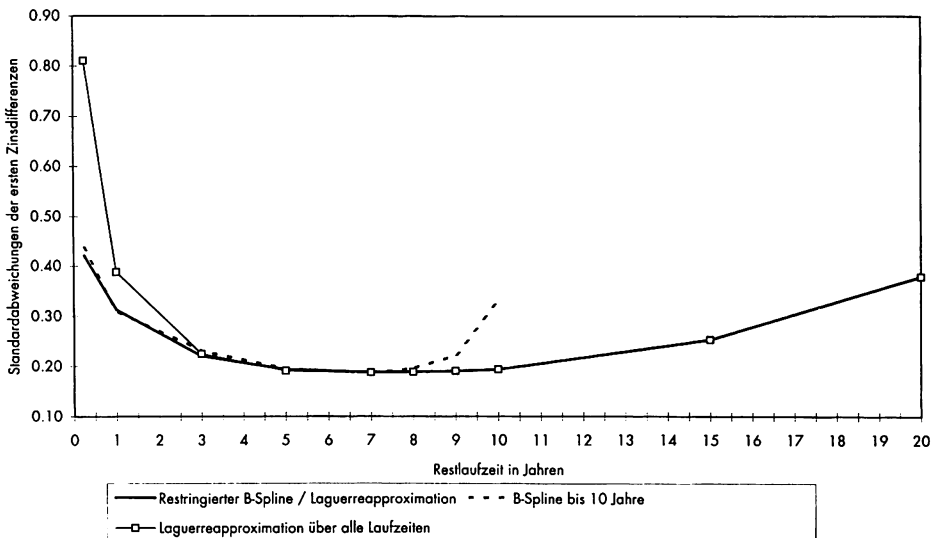
der Anleihen mit Laufzeiten bis zu zehn Jahren sind im Schnitt 31 Rappen und damit nahezu gleich wie bei den über zehnjährigen Titeln (30 Rappen). Der Wertebereich der MADs ist jedoch bei den über zehnjährigen Anleihen mit 3 bis 73 Rappen deutlich höher als bei den kürzeren Anleihen (8 bis 51 Rappen); auch die Standardabweichung ist bei den langlaufenden Anleihen mit 17 Rappen gegenüber 10 Rappen deutlich höher. Die Schätzunsicherheit ist im über zehnjährigen Bereich, wo nur wenige Anleihen ausstehend sind, also deutlich grösser.

Um den Einfluss der Restrangierung der Splinefunktion bei zehn Jahren zu untersuchen, werden Zinskurven für Laufzeiten bis zehn Jahre geschätzt, die auf einer Splineapproximation beruhen, an die nur die Restriktion gestellt wird, dass der Diskontfaktor der Laufzeit Null Eins betragen muss (einstufige Splineapproximation)¹³. Die daraus resultierenden, mittleren absoluten Preisabweichungen sind in Spalte 4 von Tabelle 2 aufgeführt. Wie nicht anders zu erwarten, führt der höhere Freiheitsgrad bei dieser Vergleichsschätzung (nur eine anstelle von vier Restriktionen an die sechs Parameter der Splinefunktion) im Schnitt auf leicht tiefere MADs als jene, die für die unter zehnjährigen Anleihen aus dem zweistufigen Verfahren resultieren (Spalte 2 von Tabelle 2). Der Unterschied ist jedoch nicht sehr gross, so dass daraus geschlossen werden kann, dass die Restrangierung der Splinefunktion bei zehn Jahren keinen verzerrenden Einfluss auf die kürzeren Laufzeiten hat. Die Standardabweichung der MADs ist bei der Vergleichsschätzung geringfügig grösser, was auf eine höhere Stabilität des zweistufigen Schätzansatzes hindeutet. Um diesen Aspekt weiter zu analysieren, werden für einige ausgewählte Laufzeiten die Standardabweichungen der ersten Differenzen der geschätzten Zinssätze ermittelt. Diese Volatilitäten sind in Abbildung 6 u.a. für das zweistufige Schätzverfahren bis 20 Jahre und für die einstufige Splineapproximation bis zehn Jahre wiedergegeben. Daraus ist zunächst die Problematik ersichtlich, die mit der einstufigen Splineapproximation im Bereich des Zehnjahressatzes verbunden ist. Die Splinefunktion neigt in diesem Laufzeitenbereich wie in Abschnitt 1 ausgeführt zum Ausschlagen, was sich in Volatilitäten des 9- und 10-Jahressatzes niederschlägt, die deutlich über denjenigen der kürzeren Laufzeiten liegen. Demgegenüber verläuft die Volatilitätsstruktur, die sich aus den mit dem zweistufigen Verfahren geschätzten Kassazinssätzen ergibt, zwischen fünf und zehn Jahren nahezu flach. Die Restrangierung der Splinefunktion bei zehn Jahren führt somit zur gewünschten Stabilisierung der Zinskurvenschätzung in diesem Laufzeitenbereich. Bei den kürzeren Laufzeiten sind die beiden Volatilitätsfunktionen praktisch identisch, was den aufgrund der Preisabweichungen gewonnenen Eindruck bestätigt, dass sich die beim Zehnjahressatz an die Splinefunktion gestellten Restriktionen nicht verzerrend auf die Schätzung der kürzerfristigen Kassazinssätze auswirken. Um die Unterschiede zwischen den beiden Verfahren weiter auszuloten, sind in den Abbildungen 7 bis 11 die Entwicklungen des 3-Monatssatzes sowie des 3-, 7-, 9- und 10-Jahressatzes von Juli 1990 bis Dezember 1997 wiedergegeben. Daraus geht hervor,

13. Für längere Laufzeiten sind Splinefunktionen, wie in Abschnitt 1 ausgeführt wurde, ungeeignet, da sie angesichts der wenigen verfügbaren Beobachtungen zu instabilen Schätzergebnissen führen würden.

dass bei 3 Monaten die mit dem zweistufigen Verfahren geschätzten Zinssätze leicht von jenen aus der einstufigen Splineapproximation abweichen; die Unterschiede sind jedoch relativ gering, insbesondere unter Berücksichtigung der in der Illiquidität von Anleihen mit solch kurzen Laufzeiten begründeten, hohen Schätzunsicherheit (Abbildung 7). Die mit den beiden Methoden geschätzten Sätze für die Laufzeiten 3 und 7 Jahre sind praktisch identisch (Abbildungen 8 und 9). Beim 9-Jahressatz weicht der zweistufig geschätzte Zinssatz nur im März 1993 deutlich vom einstufig bestimmten Satz ab (Abbildung 10). Beim 10-Jahressatz treten dagegen deutlich erkennbare Unterschiede zwischen den beiden Verfahren auf, die auf das Ausschwingen der bei dieser Laufzeit im einstufigen Verfahren unrestringierten Splinefunktion zurückzuführen sind; die grösste Differenz tritt dabei wiederum im März 1993 auf (Abbildung 11). Die für diesen Stichtag sowie den Vormonat mit den beiden Methoden geschätzten Zinskurven sind in Abbildung 12 dargestellt. Der Stabilisierungseffekt der Restringierung bei zehn Jahren ist an beiden Zeitpunkten klar ersichtlich. Im Februar 1993 schwingt die Splinefunktion bei der einstufigen Splineapproximation nach oben aus, wogegen im Folgemonat ein markantes Ausschwingen nach unten auftritt. Dies bedeutet einen massiven Zinsrückgang bei zehn Jahren um 1,8 Prozentpunkte, was unrealistisch viel ist. Aus der zweistufigen Schätzung resultieren an beiden Stichtagen stabile Zinskurven und entsprechend ergibt sich ein Rückgang des 10-Jahressatzes um lediglich 0,6 Prozentpunkte. Dies ist mit der Entwicklung auf dem Swapmarkt vergleichbar, wo der 10-Jahressatz über dieselbe Zeitperiode um 0,4 Prozentpunkte sank.

Abbildung 6: Volatilitätsstrukturen der geschätzten Kassazinssätze (Juli 1990 – Dezember 1997)



Die Lagerreapproximation liefert im über zehnjährigen Laufzeitenbereich eine stabile Zinskurvenschätzung. Dies geht zunächst aus Abbildung 4 hervor: Die Volatilitäten des 15- und 20-Jahressatzes liegen zwar deutlich höher als jene des 10-Jahressatzes; weil jedoch nur an 36 von insgesamt 90 Stichtagen mindestens eine Anleihe mit einer längeren Laufzeit als 15 Jahre ausstehend war (siehe Tabelle 1), ist der Anstieg der Volatilitätsstruktur zwischen zehn und zwanzig Jahren wohl hauptsächlich auf die Extrapolation der Zinskurve über die längste Anleihe hinaus zurückzuführen. Die Abbildung 13 bestätigt diesen Eindruck. Insbesondere seit Januar 1995, als erstmals eine 19jährige Anleihe im Umlauf war, erscheinen die geschätzten 15- und 20-Jahressätze ausnahmslos als plausibel. In der Phase davor hat die Extrapolation der Zinskurve über die längste ausstehende Anleihe hinaus teilweise Ausreisser zur Folge. Beispielsweise führt die Extrapolation im November 1994, als die längste Anleihe eine Restlaufzeit von knapp zehn Jahren aufwies, zu einem inversen Verlauf der Zinskurve im über zehnjährigen Bereich. In der Zeitperiode bis Herbst 1992, in der die Zinskurve bis zehn Jahre invers verlief, lagen die extrapolierten 15- und 20-Jahressätze tendenziell über dem jeweiligen 10-Jahressatz. An einer Mehrheit der Stichtage ergab die Extrapolation jedoch einen plausiblen, flachen Verlauf der Zinskurve. So z.B. auch im Februar und März 1993, als die längste ausstehende Anleihe eine Restlaufzeit von elf Jahren aufwies (Abbildung 12).

Abbildung 7: Vergleich der geschätzten 3-Monatssätze

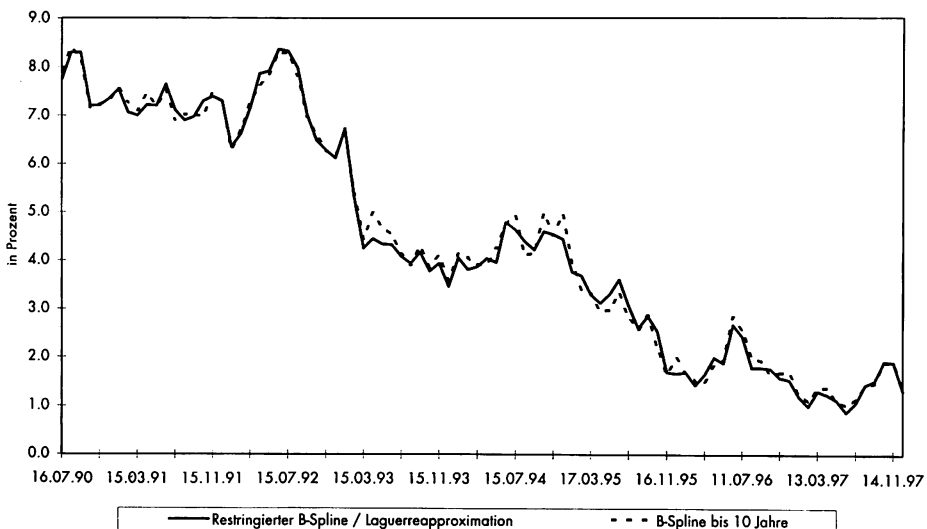


Abbildung 8: Vergleich der geschätzten 3-Jahressätze

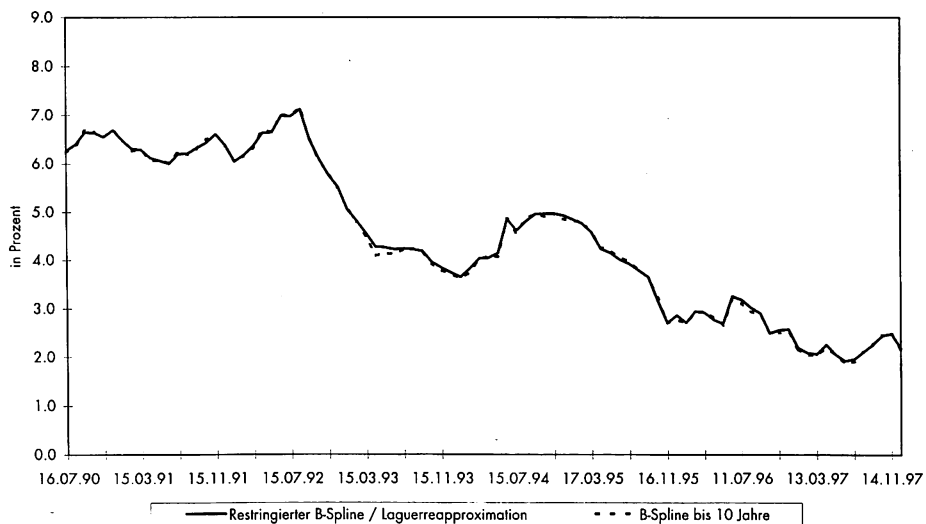


Abbildung 9: Vergleich der geschätzten 7-Jahressätze

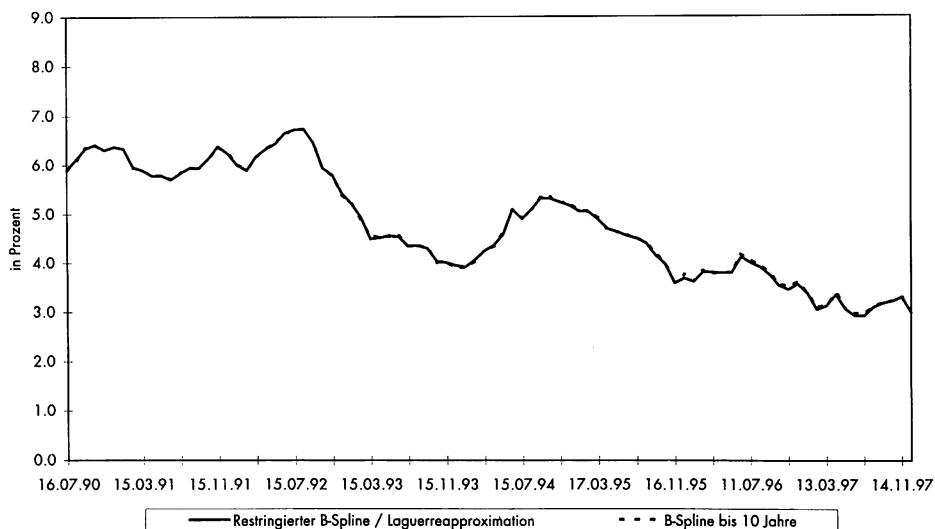


Abbildung 10: Vergleich der geschätzten 9-Jahressätze

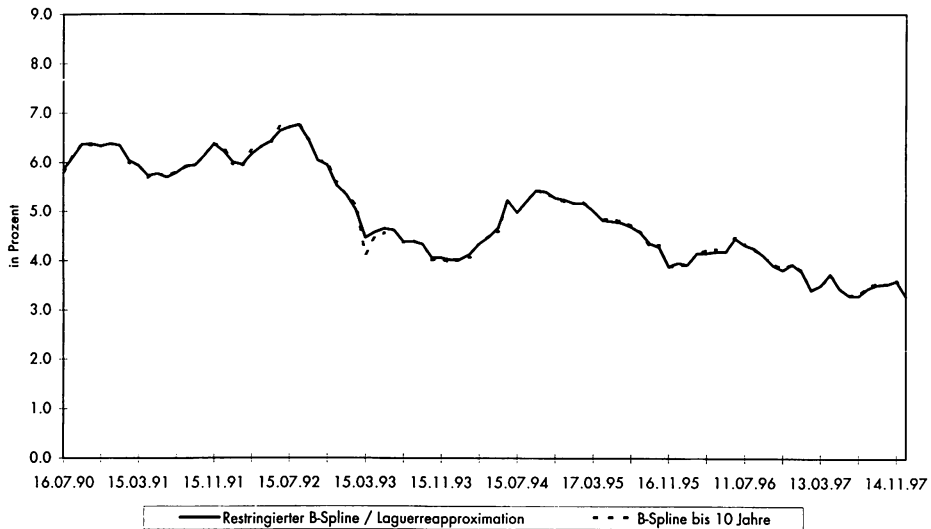
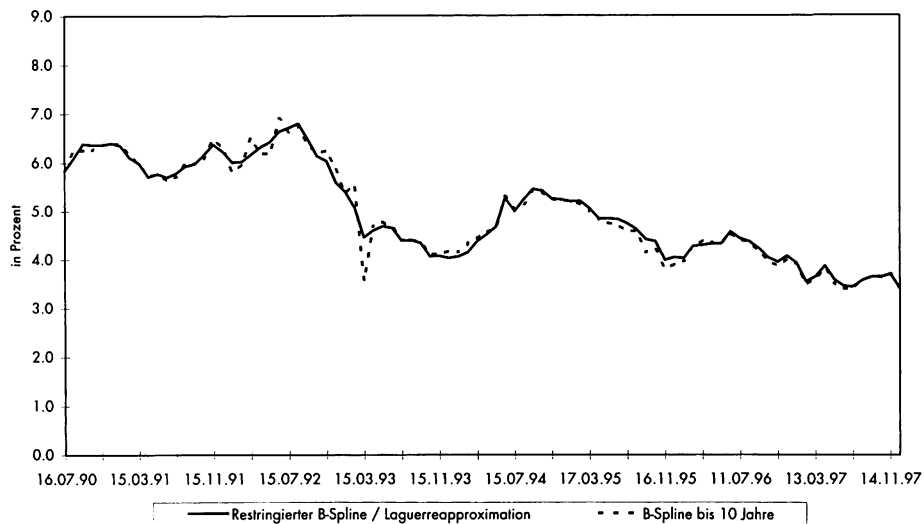


Abbildung 11: Vergleich der geschätzten 10-Jahressätze



Grundsätzlich wäre es möglich, die gesamte Zinskurve mit einer Laguerreapproximation zu bestimmen, d.h. nur die erste Schätzstufe einzusetzen und auf die restringierte Splineapproximation für die Laufzeiten bis zehn Jahre zu verzichten. Die bei einem solchen Vorgehen resultierenden Preisabweichungen sind in Spalte 5 von Tabelle 2 zusammen-

Abbildung 12: Zinskurvenveränderung von Februar auf März 1993

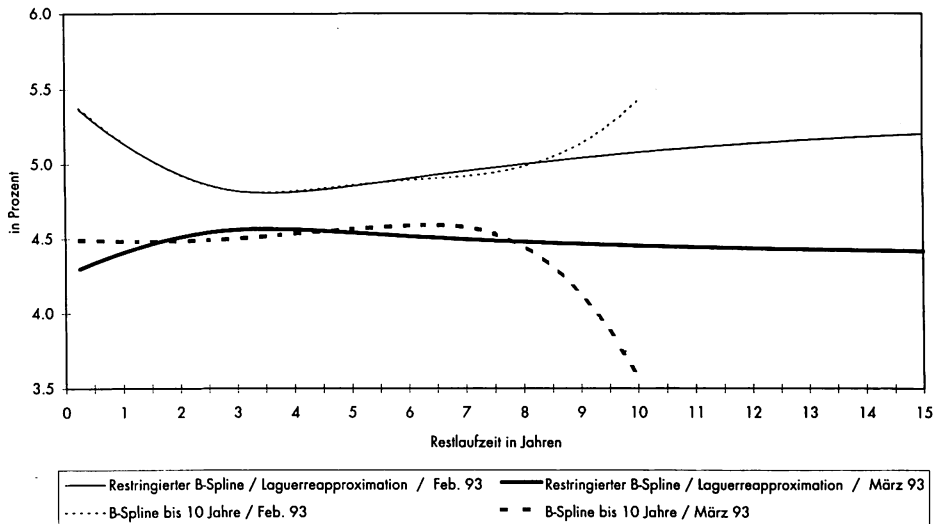
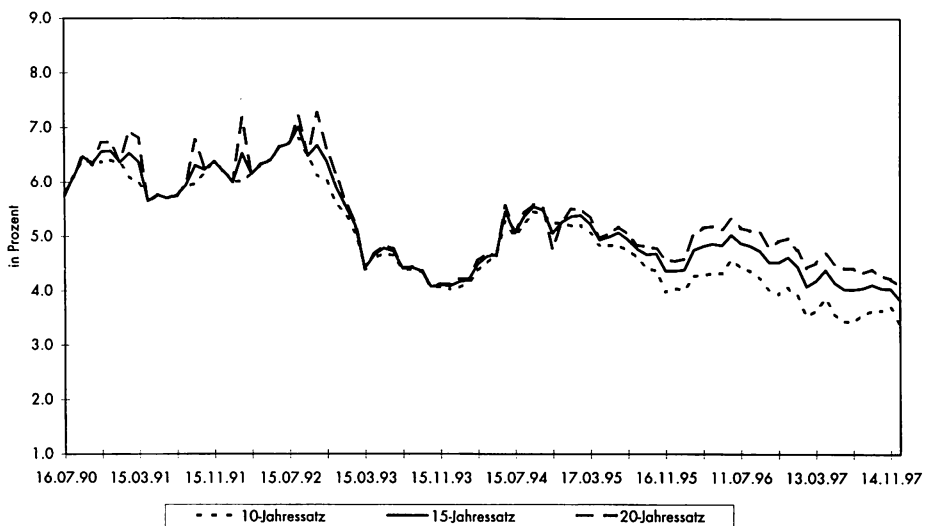
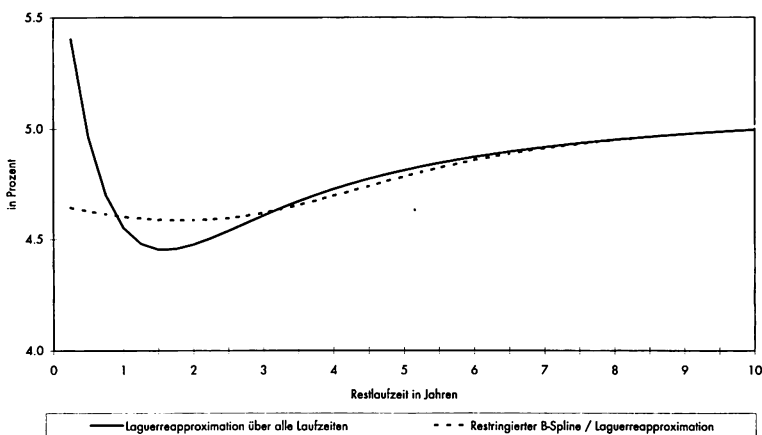


Abbildung 13: Vergleich langfristiger Kassazinssätze



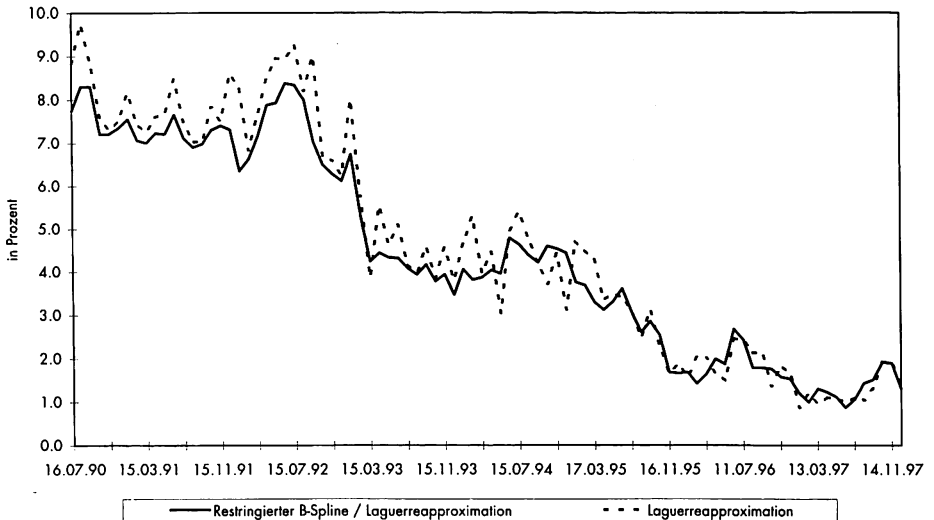
gefasst. Daraus ist ersichtlich, dass bei einer Lagerreapproximation über alle Laufzeiten nur unwesentlich grössere Preisabweichungen zu gewärtigen sind als beim zweistufigen Schätzverfahren (Spalte 1 von Tabelle 2). Der durchschnittliche wie auch der maximale MAD der Lagerreapproximation sind nur einen Rappen höher als beim zweistufigen Ansatz. Vergleicht man dagegen die geschätzten Zinskurven, so stellt man bei den Laufzeiten bis rund drei Jahre eklatante Unterschiede fest. Als Beispiel sind in Abbildung 14 die mit den beiden Verfahren geschätzten Bundesobligationen-Zinskurven für den 15. Juli 1994 wiedergegeben. Die reine Lagerreapproximation führt im Bereich unter drei Jahren zu einem U-förmigen Verlauf der Zinskurve; der mit der Lagerreapproximation bestimmte 3-Monatssatz liegt in der Folge beinahe 0,8 Prozentpunkte über jenem des zweistufigen Schätzverfahrens. Dass es sich bei diesem Beispiel um keinen Einzelfall handelt, geht aus Abbildung 15 hervor, in der die mit den beiden Verfahren geschätzten 3-Monatssätze abgetragen sind. Über die ganze Stichprobe ergeben sich deutliche Unterschiede, wobei ab 1996 die Abweichungen tendenziell geringer sind¹⁴. Das problematische Verhalten der Lagerreapproximation bei den kurzen Laufzeiten ist ebenfalls aus der Volatilitätsstruktur in Abbildung 6 ersichtlich. So ist die Volatilität des mit der Lagerreapproximation bestimmten 3-Monatssatzes mit 0,81 Prozentpunkten rund doppelt so hoch wie jene, die sich aus einer Splineapproximation ergibt (0,42 Prozentpunkte). Als Vergleich dazu beträgt die Volatilität des 3-Monatssatzes auf dem Eurogeldmarkt 0,34 Prozentpunkte. Insgesamt kann somit festgestellt werden, dass sich die Lagerreapproximation für eine Zinskurvenschätzung über alle Laufzeiten nicht eignet.

Abbildung 14: Bundesobligationen-Zinskurve vom 15. Juli 1994



14. In der Lagerreapproximation wird – wie in Abschnitt 2 ausgeführt – eine Gewichtung der Preisabweichungen mit der Restlaufzeit vorgenommen. Bei einer ungewichteten Regressionschätzung dürften die Abweichungen bei den kurzen Laufzeiten tendenziell geringer ausfallen; dem würde jedoch eine grössere Schätzunsicherheit bei den langen Laufzeiten gegenüberstehen.

Abbildung 15: Vergleich der geschätzten 3-Monatssätze



5. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Auf der Basis eines No-Arbitragemodells zur Bewertung von Anleihen wurde ein zweistufiges Verfahren zur Schätzung von Zinskurven aus am Markt beobachteten Preisen von Couponanleihen entwickelt. Die Anwendung des Schätzmodells auf Daten des Bundesobligationen-Marktes hat gezeigt, dass das zweistufige Vorgehen gegenüber den bislang gebräuchlichen Ansätzen verschiedene Vorteile aufweist: 1) Die Schätzung im Bereich des 10-Jahressatzes ist deutlich stabiler als bei einer einstufigen Splineapproximation. 2) Bei den über zehnjährigen Laufzeiten, wo in der Regel nur sehr wenige Anleihen ausstehend sind, erlaubt die Laguerreapproximation eine stabile Schätzung der Zinskurve. 3) An den meisten Stichtagen ist eine sinnvolle Extrapolation der Zinskurve über die längste Laufzeit einer ausstehenden Anleihe hinaus möglich. 4) Die Restringierung des 10-Jahressatzes führt zu keinen nennenswerten Verzerrungen der geschätzten Kassazinssätze im unter zehnjährigen Bereich. Insgesamt steht damit ein Schätzverfahren zur Verfügung, das für alle Laufzeiten auf plausible Kassazinssätze führt.

LITERATUR

- BEER, U. (1990): Eine Methode zur Schätzung der Zinsstruktur in der Schweiz, *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik*, Heft 1, S. 39–50.
- BÜTTLER, H.-J. (1995): Evaluation of Callable Bonds: Finite Difference Methods, Stability and Accuracy, *Economic Journal*, Vol. 105, S. 374–384.
- CURRY, H. B. / I. J. SCHOENBERG, (1966): On Pólya Frequency Functions IV: The Fundamental Spline Functions and their Limits, *Journal d'Analyse Mathématique*, Vol. 17, S. 71–107.
- DEBOOR, C. (1972): On Calculating with B-Splines, *Journal of Approximation Theory*, Vol. 6, S. 50–62.
- DEBOOR, C. (1978): A Practical Guide to Splines, Springer Verlag, New York.
- DEPPNER, CH. (1992): Die Schätzung der Zinsstruktur und deren Bedeutung in der Kapitalmarkttheorie – Eine empirische Untersuchung auf Basis von multiplen Regressions- und linearen Optimierungsmodellen mit Daten des schweizerischen Rentenmarktes, Diss., Rosch-Buch, Hallstadt.
- GIBSON-ASNER, R. (1990): Valuing Swiss Default-Free Callable Bonds, Theory and Empirical Evidence, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 14, S. 649–672.
- GREENE, W. H. (1993): Econometric Analysis, 2nd edition, Macmillan, New York.
- HELLER, D. (1997): Zinskurven und ihr Informationsgehalt für die Geldpolitik der SNB, *Geld, Währung und Konjunktur*, Nr. 2, S. 167–176.
- LASSAK, G. (1993): Bewertung festverzinslicher Wertpapiere am deutschen Rentenmarkt, Physica-Verlag, Heidelberg.
- LEITHNER, ST. (1992): Valuation and Risk Management of Interest Rate Derivative Securities, *Bank- und Finanzwirtschaftliche Forschung*, Band 163, Paul Haupt Verlag, Bern.
- MCCULLOCH, J. H. (1971): Measuring the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Business*, Vol. 44, S. 19–31.
- NELSON, CH. R./A. F. SIEGEL (1987): Parsimonious Modeling of Yield Curves, *Journal of Business*, Vol. 60, S. 476–489.
- SCHWEIZER BÖRSE (1994): Swiss Index, Die Indexfamilie der Schweizer Börse, Zürich.
- SCHWEIZERISCHE NATIONALBANK (1983): Änderung der Berechnungsweise der Obligationenrendite, *Geld, Währung und Konjunktur*, Nr. 5, S. 81–85.
- SHEA, G. S. (1984): Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19, No. 3, S. 253–269.
- STEELEY, J. M. (1991): Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals, *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 18, S. 513–529.
- TOBLER, J. (1996): Schätzung von Zinsstrukturen für den SFr.-Kapitalmarkt unter Berücksichtigung von Friktionen, *Bank- und Finanzwirtschaftliche Forschung*, Band 237, Paul Haupt Verlag, Bern.

TOBLER, J. (1997): Sind Eidgenossen effizient? *Horizonte*, Nr. 4, Zürcher Kantonalbank, Zürich.

WALDER, R. (1997): Fehlbewertungen mit der Yield-to-Worst-Regel, Chartbook – Schweizer Zinslandschaft, Zürcher Kantonalbank, Zürich.

ANHANG 1

DIE LAGUERREAPPROXIMATION DER DISKONTFAKTOREN

Die Verwendung eines Laguerrepolynoms zur Schätzung von Zinskurven geht auf NELSON/SIEGEL (1987) zurück. Sie approximieren die instantanen impliziten Terminzinssätze $\omega(t)$ als Laguerrepolynom plus Konstante:

$$\omega(t) \approx \beta_1 + \beta_2 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\beta_4}\right) + \beta_3 \frac{t}{\beta_4} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\beta_4}\right) \quad (\text{A.1})$$

Aufgrund der Beziehung

$$\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t \omega(h) dh\right)$$

zwischen den instantanen impliziten Terminzinssätzen $\omega(t)$ und den Diskontfaktoren $\delta(t)$ ist damit für letztere folgende funktionale Form vorgegeben:

$$\delta_1(t) \approx \phi_1(t; \underline{\beta}) = \exp\left\{-(\beta_2 + \beta_3)\beta_4 - \beta_1 t + [(\beta_2 + \beta_3)\beta_4 + \beta_3 t] \exp\left(-\frac{t}{\beta_4}\right)\right\} \quad (\text{A.2})$$

In dieser Form werden die Diskontfaktoren in der ersten Stufe approximiert, was durch den Subskript Eins gekennzeichnet ist. Da hinter (A.2) eine Annäherung der instantanen impliziten Terminzinssätze durch ein Laguerrepolynom steht, wird darauf als Laguerreapproximation verwiesen.

Aus Arbitrageüberlegungen ergeben sich für die Diskontfaktorenfunktion zwei Randbedingungen, die mit der in (A.2) vorgenommenen Approximation erfüllt sind: 1) Für $t \rightarrow 0$ konvergiert $\phi_1(t; \underline{\beta})$ gegen Eins, womit sich durch Bargeldhaltung keine Arbitragemöglichkeiten ergeben. 2) Für $t \rightarrow \infty$ strebt $\phi_1(t; \underline{\beta})$ gegen Null, d.h. eine Geldeinheit, die in der unendlichen Zukunft anfällt, hat keinen Wert. Damit kann mit (A.2) eine ökonomisch sinnvolle Extrapolation der Diskontfaktoren über den in die Schätzung einfließenden Laufzeitenbereich hinaus vorgenommen werden.

ANHANG 2

BASISSPLINEFUNKTIONEN

In der Regel ist ein einfaches Polynom

$$\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_{k-1} t^{k-1} \quad (\text{A.3})$$

der Ordnung k nicht in der Lage, den Verlauf der Zinskurve sowohl bei den kurzen wie bei den langen Laufzeiten mit hoher Genauigkeit nachzuvollziehen (McCULLOCH [1971]). Aus diesem Grund wird das Laufzeitenspektrum in Intervalle unterteilt. In

jedem dieser Intervalle wird ein einfaches Polynom der Ordnung k geschätzt unter den Restriktionen, dass die an den inneren Intervallgrenzen jeweils aufeinandertreffenden Polynome im Funktionswert sowie den ersten beiden Ableitungen übereinstimmen. Die so aus einfachen Polynomen zusammengesetzte Approximationsfunktion wird Splinefunktion der Ordnung k genannt. CURRY/SCHOENBERG (1966) zeigen, dass jede Splinefunktion als Linearkombination von Basisfunktionen, sogenannten Basissplines (B-Splines) dargestellt werden kann. Diese Darstellung einer Splinefunktion hat gegenüber anderen den Vorteil, dass sie nur geringe Multikollinearität aufweist (STEELEY [1991] und dort zitierte Literatur).

Der a -te normierte, von der Restlaufzeit t abhängige B-Spline der Ordnung k mit der Knotensequenz $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ ist wie folgt definiert (DEBOOR [1978], S. 108):

$$N_{a,k,\xi}(t) = (\xi_{a+k} - \xi_a) \sum_{j=a}^{a+k} \frac{(\xi_j - t)_+^{k-1}}{\prod_{\substack{h=a \\ h \neq j}}^{a+k} (\xi_j - \xi_h)} \quad (\text{A.4})$$

Dabei ist $(\xi_a - t)_+ = \max\{(\xi_a - t), 0\}$. Die Knotensequenz ξ unterteilt das Laufzeitspektrum in mehrere Intervalle. Der normierte B-Spline $N_{a,k,\xi}(t)$ ist nur über das Intervall $[\xi_a, \xi_{a+k}]$ möglicherweise von Null verschieden. Mit der Knotensequenz ξ sind somit $(s-k)$ linear unabhängige B-Splines definiert.

Die je ersten und letzten k Knoten der Sequenz ξ sind identisch, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \dots = \xi_k \\ \text{und} \\ \xi_{s-k+1} &= \dots = \xi_s. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten ist an der ersten und letzten Intervallgrenze ein k -facher Knoten. Die Sequenz der Intervalle umfasst somit die Knoten, $\{\xi_k, \dots, \xi_{s-k+1}\}$ d.h. die Knotensequenz ξ definiert nicht $(s-1)$ sondern nur $(s-2k+1)$ Intervalle über das Laufzeitspektrum. Das Setzen von Mehrfachknoten an den beiden äusseren Intervallgrenzen hat folgenden Grund: In jedem der $(s-2k+1)$ Intervalle hat es ein einfaches Polynom (A.1) der Ordnung k , insgesamt somit $((k-1)(s-2k+1))$ freie Parameter. An jeder der $(s-2k)$ inneren Intervallgrenzen werden die beiden aufeinandertreffenden Polynome so restringiert, dass sie in ihren Funktionswerten sowie den ersten $(k-2)$ Ableitungen übereinstimmen; damit wird an den Intervallgrenzen ein glatter Verlauf der Splinefunktion sichergestellt. Daraus resultieren insgesamt $((k-1)(s-2k))$ Restriktionen, womit sich die Anzahl der freien Parameter auf $(s-k)$ reduziert. Eine Splinefunktion der Ordnung k liegt somit in einem $(s-k)$ -dimensionalen Raum; um diesen Raum aufzuspannen werden ebensoviele Basisfunktionen benötigt. Mit der Sequenz der Intervallgrenzen $\{\xi_k, \dots, \xi_{s-k+1}\}$ wären nicht genügend, nämlich nur $(s-3k+2)$, B-Splines definiert. Durch das Ergänzen dieser Se-

quenz um k -fache Knoten in den beiden äusseren Intervallgrenzen sind wie angeführt gerade $(s-k)$ linear unabhängige B-Splines definiert¹.

Für die in dieser Arbeit eingesetzten kubischen Splinefunktionen ($k=4$) mit den Intervallen 0 bis 3, 3 bis 6 und 6 bis 10 Jahre (vgl. Abschnitt 2) lautet die Knotensequenz $\xi = \{0, 0, 0, 0, 3, 6, 10, 10, 10, 10\}$ womit sechs linear unabhängige B-Splines der Ordnung 4 definiert sind².

Die Basissplinefunktionen $N_{a,k,\xi}(t)$ sind an den Restlaufzeiten t zu evaluieren. Dies wird durch folgende rekursive Beziehung erleichtert (DEBOOR [1978], S. 131):

$$N_{a,k,\xi}(t) = \frac{t - \xi_a}{\xi_{a+k-1} - \xi_a} N_{a,(k-1),\xi}(t) + \frac{\xi_{a+k} - t}{\xi_{a+k} - \xi_{a+1}} N_{(a+1),(k-1),\xi}(t) \quad (A.5)$$

Der a -te B-Spline der Ordnung k ist demnach eine Linearkombination aus zwei B-Splines der Ordnung $(k-1)$. Die Startwerte für die Rekursion sind:

$$N_{a,1,\xi}(t) = \begin{cases} 1 & \xi_a \leq t < \xi_{a+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

DEBOOR (1972) schlägt einen Algorithmus vor, wie mit Hilfe der Rekursionsbeziehung (A.5) schrittweise die Werte im folgenden «Dreieck» berechnet werden können:

$$\begin{array}{ccccccc} N_{a,1,\xi}(t) & N_{a,2,\xi}(t) & N_{a,3,\xi}(t) & \dots & N_{a,(k-1),\xi}(t) & N_{a,k,\xi}(t) & \\ & N_{(a-1),2,\xi}(t) & N_{(a-1),3,\xi}(t) & \dots & \vdots & N_{(a-1),k,\xi}(t) & \\ & & N_{(a-2),3,\xi}(t) & \dots & N_{(a-k+3),(k-1),\xi}(t) & \vdots & \\ & & & \ddots & N_{(a-k+2),(k-1),\xi}(t) & N_{(a-k+2),k,\xi}(t) & \\ & & & & & N_{(a-k+1),k,\xi}(t) & \end{array} \quad (A.6)$$

In der letzten Spalte stehen die k im Intervall möglicherweise von Null verschiedenen B-Splines der Ordnung k ; in der zweitletzten Spalte stehen die $(k-1)$ im selben Intervall möglicherweise von Null verschiedenen B-Splines der Ordnung $(k-1)$ usw.

Eine Splinefunktion $\phi^k(t; \gamma)$ der Ordnung k wird nun als Linearkombination der $(s-k)$ linear unabhängigen B-Splines $N_{a,k,\xi}(t)$ dargestellt:

$$\phi^k(t; \gamma) = \sum_{a=1}^{s-k} \alpha_a N_{a,k,\xi}(t) \quad (A.7)$$

1. Für eine ausführliche Herleitung siehe DEBOOR (1978), S. 108 ff.
2. In der konkreten Implementierung muss die äussere Intervallgrenze als etwas grösser als 10 definiert werden, weil die B-Splines nur für Werte kleiner als diese äussere Intervallgrenze definiert sind.

Wird die Diskontfaktorenfunktion mit einer solchen Splinefunktion approximiert, so sind die beiden sich aus Arbitrageüberlegungen ergebenden Randbedingungen verletzt: 1) Für $t \rightarrow 0$ konvergiert $\phi^k(t; \gamma)$ gegen α_1 und kann somit von Eins abweichen; dies impliziert die Möglichkeit von Arbitragegewinnen durch Bargeldhaltung. In Anhang 3 wird eine Restriktion an die Splinefunktion eingeführt, welche dies verhindert. 2) Für $t \rightarrow \infty$ strebt $\phi^k(t; \gamma)$ gegen plus oder minus Unendlich, je nach Vorzeichen des Koeffizienten $\alpha_{(s-k)}$. Damit wird einer Geldeinheit, die in der unendlichen Zukunft anfällt, ein unendlich grosser oder ein unendlich negativer Wert zugeordnet, was beides ökonomisch widersinnig ist. Die Splineapproximation eignet sich deshalb nicht für eine Extrapolation der Zinskurve über die längste sich im Umlauf befindende Anleihe hinaus. Diesem Problem wird mit dem zweistufigen Schätzverfahren Rechnung getragen.

Eine Splinefunktion, die als Linearkombination von B-Splines formuliert wird, ist sehr einfach abzuleiten. Allgemein gilt für die g -te Ableitung einer Splinefunktion der Ordnung k (DEBOOR [1978], S. 139):

$$d^g(\sum_{a=1}^{s-k} \alpha_a N_{a,k,\xi}(t)) = (k-1) \dots (k-g) \sum_{a=1+g}^{s-k} \alpha_a^{(g)} N_{a,(k-g),\xi}(t) \quad (\text{A.8})$$

mit

$$\alpha_a^{(g)} = \begin{cases} \alpha_a & g = 0 \\ \frac{\alpha_a^{(g-1)} - \alpha_{a-1}^{(g-1)}}{\xi_{a+k-g} - \xi_a} & g > 0 \end{cases}$$

Die g -te Ableitung einer Splinefunktion der Ordnung k beruht also auf Differenzen ihrer B-Splinekoeffizienten sowie einer Splinefunktion der Ordnung $(k-g)$. Deren Werte fallen bei der mit (A.6) durchgeführten Evaluierung der B-Splines der Ordnung k an.

ANHANG 3

DIE RESTRINGIERUNG DER SPLINEFUNKTION

Im folgenden wird von einer kubischen Splinefunktion ($k = 4$), $s = 10$ Knoten (vgl. auch Anhang 2) sowie einem Übergang von der Splinefunktion zum Laguerrepolynom bei der Laufzeit $t = \bar{t}$ ausgegangen.

Im Gegensatz zur Laguerreapproximation der Diskontfaktoren in (A.2) ist bei der Approximation mit einer Splinefunktion nicht sichergestellt, dass der angenäherte Diskontfaktor für $t \rightarrow 0$ gegen Eins strebt (siehe Anhang 2). Um im Modell Arbitragemöglichkeiten durch Kassahaltung zu verhindern, wird die Splinefunktion folgendermassen restringiert (der Subskript 2 verweist darauf, dass die Diskontfaktoren in der zweiten Schätzstufe mit einer Splinefunktion approximiert werden):

$$\phi_2(0; \underline{\alpha}) = \sum_{a=1}^6 \alpha_a N_{a,4,\xi}(0) = 1$$

Dadurch wird sichergestellt, dass der Diskontfaktor der Laufzeit Null den Wert Eins aufweist.

Mit drei weiteren Restriktionen an die Splinefunktion wird ein glatter Übergang von der Splinefunktion, mit der die Zinskurve bis $t = \bar{t}$ angenähert wird, zur Laguerreapproximation, wie sie für $t > \bar{t}$ eingesetzt wird, sichergestellt: Der Funktionswert sowie die ersten beiden Ableitungen der Splinefunktion werden auf die in der ersten Schätzstufe bestimmten, entsprechenden Werte der Approximationsfunktion (A.2) restringiert. Deren Funktionswert geht aus (A.2) hervor; die ersten beiden Ableitungen von (A.2) lauten:

$$\frac{d\phi_1(t;\underline{\beta})}{dt} = \phi_1(t;\underline{\beta}) \cdot \left[-\beta_1 - \exp\left(-\frac{t}{\beta_4}\right) \cdot \left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{\beta_4} t\right) \right]$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_1(t;\underline{\beta})}{dt^2} &= \phi_1(t;\underline{\beta}) \cdot \left[-\beta_1 - \exp\left(-\frac{t}{\beta_4}\right) \cdot \left(\beta_2 + \frac{\beta_3}{\beta_4} t\right) \right]^2 \\ &\quad + \phi_1(t;\underline{\beta}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\beta_4}\right) \cdot \left[\frac{\beta_2}{\beta_4} - \frac{\beta_3}{\beta_4} + \frac{\beta_2}{\beta_4^2} t \right] \end{aligned}$$

Der Funktionswert sowie die ersten beiden Ableitungen der in der zweiten Stufe verwendeten kubischen Splinefunktion mit zehn Knoten lauten:

$$\text{Funktionswert: } \phi_2(t;\underline{\alpha}) = \sum_{a=1}^6 \alpha_a N_{a,4,\xi}(t)$$

$$1. \text{ Ableitung: } \frac{d\phi_2(t;\underline{\alpha})}{dt} = (k-1) \cdot \sum_{a=2}^6 \frac{\alpha_a - \alpha_{a-1}}{\xi_{a+3} - \xi_a} N_{a,3,\xi}(t)$$

$$2. \text{ Ableitung: } \frac{d^2\phi_2(t;\underline{\alpha})}{dt^2} = (k-1)(k-2)$$

$$\cdot \sum_{a=3}^6 \left(\frac{\alpha_a - \alpha_{a-1}}{(\xi_{a+3} - \xi_a)(\xi_{a+2} - \xi_a)} - \frac{\alpha_{a-1} - \alpha_{a-2}}{(\xi_{a+2} - \xi_{a-1})(\xi_{a+2} - \xi_a)} \right) N_{a,2,\xi}(t)$$

Insgesamt ergeben sich somit die folgenden vier Restriktionen an die Splinefunktion:

$$\phi_2(0; \underline{\alpha}) = 1$$

$$\phi_2(\bar{t}; \underline{\alpha}) = \phi_1(\bar{t}; \underline{\beta})$$

$$\left. \frac{d\phi_2(t; \underline{\alpha})}{dt} \right|_{t=\bar{t}} = \left. \frac{d\phi_1(t; \underline{\beta})}{dt} \right|_{t=\bar{t}}$$

$$\left. \frac{d^2\phi_2(t; \underline{\alpha})}{dt^2} \right|_{t=\bar{t}} = \left. \frac{d^2\phi_1(t; \underline{\beta})}{dt^2} \right|_{t=\bar{t}}$$

$\phi_2(t; \underline{\alpha})$ bezeichnet dabei die kubische Splinefunktion, mit der die Diskontfaktoren in der zweiten Stufe approximiert werden und $\phi_1(t; \underline{\beta})$ die Laguerreapproximation der Diskontfaktoren aus der ersten Schätzstufe.

Diese vier Restriktionen können matrizenmässig als

$$\underline{Q} \cdot \underline{\alpha} = \underline{q}$$

dargestellt werden. Dabei enthält $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ die an Null bzw. $\bar{t}$ evaluierten B-Splines sowie abgeleiteten B-Splines, $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^6$ die B-Splinekoeffizienten und $\underline{q} \in \mathbb{R}^4$ die aus der ersten Restriktion stammende Eins sowie den für $\bar{t}$ ermittelten Funktionswert und die an derselben Stelle bestimmten ersten beiden Ableitungen der Laguerreapproximation. Die einzelnen Zeilen bzw. Elemente von $\underline{Q}$ lauten:

$$\underline{Q}_1 = (N_{1,4,\xi}(0) \ N_{2,4,\xi}(0) \ \dots \ N_{6,4,\xi}(0))$$

$$\underline{Q}_2 = (N_{1,4,\xi}(\bar{t}) \ N_{2,4,\xi}(\bar{t}) \ \dots \ N_{6,4,\xi}(\bar{t}))$$

$$\underline{Q}_3 = \left(-\frac{N_{2,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_5 - \xi_2} \left[\frac{N_{2,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_5 - \xi_2} - \frac{N_{3,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_6 - \xi_3} \right] \left[\frac{N_{3,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_6 - \xi_3} - \frac{N_{4,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_7 - \xi_4} \right] \right. \\ \left. \left[\frac{N_{4,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_7 - \xi_4} - \frac{N_{5,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_8 - \xi_5} \right] \left[\frac{N_{5,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_8 - \xi_5} - \frac{N_{6,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_9 - \xi_6} \right] \frac{N_{6,3,\xi}(\bar{t})}{\xi_9 - \xi_6} \right)$$

$$Q_{41} = \frac{N_{3,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_5 - \xi_2)(\xi_5 - \xi_3)}$$

$$Q_{42} = -\frac{N_{3,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_5 - \xi_2)(\xi_5 - \xi_3)} - \frac{N_{3,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_6 - \xi_3)(\xi_5 - \xi_3)} + \frac{N_{4,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_6 - \xi_3)(\xi_6 - \xi_4)}$$

$$Q_{43} = \frac{N_{3,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_6 - \xi_3)(\xi_5 - \xi_3)} - \frac{N_{4,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_6 - \xi_3)(\xi_6 - \xi_4)} - \frac{N_{4,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_7 - \xi_4)(\xi_6 - \xi_4)} \\ + \frac{N_{5,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_7 - \xi_4)(\xi_7 - \xi_5)}$$

$$Q_{44} = \frac{N_{4,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_7 - \xi_4)(\xi_6 - \xi_4)} - \frac{N_{5,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_7 - \xi_4)(\xi_7 - \xi_5)} - \frac{N_{5,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_8 - \xi_5)(\xi_7 - \xi_5)} \\ + \frac{N_{6,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_8 - \xi_5)(\xi_8 - \xi_6)}$$

$$Q_{45} = \frac{N_{5,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_8 - \xi_5)(\xi_7 - \xi_5)} - \frac{N_{6,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_8 - \xi_5)(\xi_8 - \xi_6)} - \frac{N_{6,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_9 - \xi_6)(\xi_8 - \xi_6)}$$

$$Q_{46} = \frac{N_{6,2,\xi}(\bar{t})}{(\xi_9 - \xi_6)(\xi_8 - \xi_6)}$$

Dabei bezeichnet Q_i die i -te Zeile und Q_{ij} das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Matrix $\underline{Q}$. Die vier Elemente des Kolonnenvektors $\underline{q}$ sind:

$$q_1 = 1$$

$$q_2 = \phi_1(\bar{t}; \underline{\beta})$$

$$q_3 = \frac{\left. \frac{d\phi_1(t; \underline{\beta})}{dt} \right|_{t=\bar{t}}}{k-1}$$

$$q_4 = \frac{\left. \frac{d^2\phi_1(t; \underline{\beta})}{dt^2} \right|_{t=\bar{t}}}{(k-1)(k-2)}$$

ZUSAMMENFASSUNG

Die Zinskurve der meisten Kapitalmarktsegmente ist nicht direkt beobachtbar, sondern muss aus Preisen von Couponanleihen geschätzt werden. Die gebräuchlichen Ansätze erlauben in der Regel keine stabile und plausible Zinskurvenschätzung für alle Laufzeitenbereiche. In der vorliegenden Arbeit wird ein zweistufiges Schätzverfahren vorgestellt, das die mit den üblichen Ansätzen verbundenen Probleme überwindet. Dabei werden die Diskontfaktoren bis zehn Jahre mit einer Basissplinefunktion angenähert und für die längeren Laufzeiten wird eine Laguerreapproximation vorgenommen. Für das Segment der Bundesobligationen werden Zinskurven für Laufzeiten bis 20 Jahre geschätzt, die einen plausiblen Verlauf aufweisen.

SUMMARY

As the term structure of interest rates cannot be directly observed in most segments of the capital market, it has to be estimated from bond prices. It is not possible to estimate stable and plausible term structures for all maturities with the usual approaches. In this paper a two-stage estimation procedure is presented which resolves the problems inherent in the usual approaches. Discount factors up to ten years are approximated with a spline function; for longer maturities a laguerre approximation is implemented. Using Swiss government bond data, plausible term structures for maturities up to 20 years are estimated.

RESUME

La courbe des taux d'intérêt ne peut pas être observée directement, mais doit être estimée sur la base du prix des obligations. Les méthodes courantes ne permettent pas d'estimer une courbe stable et plausible pour toutes les échéances. Dans cette étude, une méthode d'estimation en deux étapes permettant de résoudre les problèmes inhérents aux méthodes courantes est présentée. Les facteurs d'escompte jusqu'à l'échéance de dix ans sont estimés avec une fonction spline, tandis que pour les maturités plus longues, on utilise une approximation de Laguerre. Pour le segment des obligations de la Confédération, cela nous permet d'estimer une courbe des taux plausible pour des maturités allant jusqu'à 20 ans.