

# Modellrisiko bei Value at Risk-Schätzungen: ein Vergleich zwischen Normalverteilung und hyperbolischer Verteilung

FRITHJOF WEBER\*

## 1. EINLEITUNG

Im Jahre 1900 hat Bachelier die Brownsche Bewegung als Modell für die Dynamik von Aktienkursen vorgeschlagen, welche normalverteilte Renditen impliziert. Jahrelang ist diese Arbeit in Vergessenheit geraten und wurde erst Anfang der sechziger Jahre wiederentdeckt. Seither wurde eine Vielzahl von Modellen für die zeitliche Entwicklung von Aktienkursen und von Modellverteilungen für Aktienrenditen diskutiert (vgl. z. B. J. P. MORGAN, S. 66). Einen Meilenstein in dieser Entwicklung setzte die Arbeit von BLACK und SCHOLES. In die Herleitung dieser Optionspreisformeln geht an entscheidender Stelle die Annahme normalverteilter Renditen ein.

Immer wieder wird die Normalverteilung zur Modellierung empirischer Renditeverteilungen herangezogen, obwohl bekannt ist, dass sie nur als eine erste Näherung für empirische Renditeverteilungen betrachtet werden kann. Für die Wahl der Normalverteilung lassen sich mehrere Gründe anführen. So können die Parameter dieser Verteilung leicht geschätzt werden. Bei Monte-Carlo-Simulationen lassen sich normalverteilte (Pseudo-) Zufallszahlen rasch generieren. Zudem können viele Resultate analytisch abgeleitet werden.

Mitte der neunziger Jahre wurde dann festgestellt, dass empirische Renditeverteilungen von Aktien durch hyperbolische Verteilungen modelliert werden können. Insbesondere die breiten Enden empirischer Renditeverteilungen lassen sich besser beschreiben als dies z. B. mit der Normalverteilung möglich ist. Entsprechende Untersuchungen wurden für deutsche und dänische Aktienwerte angestellt (vgl. EBERLEIN und KELLER, EBERLEIN *et al.*, KÜCHLER *et al.*, RYDBERG, RYDBERG). Ebenso konnte auf Grundlage der hyperbolischen Verteilung ein Modell zur Bewertung von Optionen abgeleitet werden (vgl. EBERLEIN und KELLER). Trotzdem hat sich diese Verteilung zur Beschreibung von Aktienrenditen noch nicht durchgesetzt.

Die Diskussion um die Messung von Marktrisiken hat dazu geführt, dass eine intensive Auseinandersetzung mit verschiedenen Modellen zur Approximation von Renditeverteilungen erfolgt. Denn werden Risikomasse auf Grundlage eines statistischen Modells bestimmt, so sind diese Masse Kenngrößen der unterstellten Verteilung. Die wahre Vertei-

\* Frithjof Weber, Seminar für Statistik, Universität Fribourg, Beauregard 13, 1700 Fribourg. Der Autor dankt einem unbekannten Gutachter für wertvolle Verbesserungsvorschläge ebenso wie Herrn Prof. Dr. H. W. Brachinger für kritische Diskussionen.

lung der Renditen bleibt unbekannt. Ebenso unbekannt ist die beste Approximation aus einer Verteilungsfamilie zur Modellierung der wahren Renditeverteilung. Bekannt ist eine Schätzung für diese beste Approximation. Unter Modellrisiko wird daher die Differenz zwischen einem Risikomass für die wahre Verteilung und demselben Risikomass für die beste Approximation aus einer bestimmten Familie von Modellverteilungen verstanden. Diese Abweichung und damit das Modellrisiko bleibt aber letztlich unbekannt (vgl. BRACHINGER).

Ziel dieser Arbeit ist es daher, einerseits zu untersuchen, inwieweit sich die hyperbolische Verteilung zur Beschreibung von Aktienrenditen auf dem schweizerischen Markt eignet. Andererseits ist die Frage zu stellen, welche Konsequenzen sich für den Value at Risk als Masszahl für das Marktrisiko ergeben. Nach einer kurzen Darstellung der hyperbolischen Verteilung wird in einem zweiten Teil die hyperbolische Verteilung als Modell für einige ausgewählte schweizerische Aktien untersucht. Desweiteren werden die Folgen für die Schätzung des Value at Risk geprüft, indem über den Zeitraum 1994 bis 1998 für den SMI tägliche Value at Risk-Schätzungen bestimmt und mittels Backtesting überprüft werden.

## 2. DIE HYPERBOLISCHE VERTEILUNG

### 2.1. Dichtefunktion

Die hyperbolische Verteilung wird zur Modellierung einer Vielzahl von empirischen Verteilungen aus den unterschiedlichsten naturwissenschaftlichen Disziplinen herangezogen, so z. B. der Geologie, Biologie, Astronomie oder der Strömungsmechanik in der Physik (vgl. BARNDORFF-NIELSEN und BLÆSILD, BARNDORFF-NIELSEN *et al.*).

Die Dichtefunktion der eindimensionalen hyperbolischen Verteilung ist definiert als (vgl. BARNDORFF-NIELSEN und BLÆSILD)

$$\text{hyp}(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) := \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right), \quad (1)$$

wobei  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $\alpha^2 > \beta^2$ . Hierin bezeichnet  $K_1$  die modifizierte Besselfunktion 3. Art mit Index 1 (vgl. ABRAMOWITZ und STEGUN). Die Bedeutung der Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\mu$  ist folgende:  $\alpha$  und  $\beta$  sind Parameter, welche die Form der Verteilung angeben. Je grösser  $\alpha$  ist, desto leptokurtischer ist die Verteilung. Der Parameter  $\beta$  ist ein Mass für die Asymmetrie, wobei sich der symmetrische Fall für  $\beta = 0$  ergibt.  $\mu$  gibt die Lage der Verteilung an und  $\delta$  ist schliesslich ein Skalierungsparameter.

Die Bezeichnung „hyperbolische Verteilung“ beruht auf der Tatsache, dass der natürliche Logarithmus der Dichtefunktion eine Hyperbel darstellt. Der natürliche Logarithmus der Dichte einer Normalverteilung stellt dagegen eine Parabel dar. Dies deutet darauf hin, dass sich die hyperbolische Verteilung zur Beschreibung der „fat tails“ einer Renditeverteilung besser eignet als die Normalverteilung.

Definiert man zwei neue Parameter

$$\xi := \left(1 + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)^{-1/2} \quad \text{und} \\ \chi := \xi\beta/\alpha,$$

erhält man eine Parametrisierung der hyperbolischen Verteilung  $hyp(x; \chi, \xi, \delta, \mu)$ , die den Vorteil besitzt, dass  $\xi$  und  $\chi$  invariant unter Skalentransformationen und Transformationen im Ort sind. Die Parameter müssen nun die Bedingungen  $0 \leq |\chi| < \xi < 1$  erfüllen (vgl. BARNDORFF-NIELSEN *et al.*).

Die eindimensionale hyperbolische Verteilung stellt einen Spezialfall einer sehr viel allgemeineren Klasse von Verteilungen dar, der sogenannten verallgemeinerten hyperbolischen Verteilung, deren Dichtefunktion definiert ist als (vgl. BARNDORFF-NIELSEN und BLÆSILD)

$$h(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) := \frac{(\kappa/\delta)^\lambda}{\sqrt{2\pi}K_\lambda(\delta\kappa)} \frac{K_{\lambda-1/2}(\alpha g_\delta(x - \mu))}{\left(\frac{1}{\alpha}g_\delta(x - \mu)\right)^{1/2-\lambda}} \exp(\beta(x - \mu)), \quad (2)$$

wobei  $x \in \mathbf{R}$ ,  $g_\delta(x) := \sqrt{\delta^2 + x^2}$  und  $\kappa^2 := \alpha^2 - \beta^2$ . Die Parameter müssen den Bedingungen  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$  und

$$\begin{array}{llll} \delta \geq 0 & \alpha > 0 & \alpha^2 > \beta^2 & \text{falls } \lambda > 0, \\ \delta > 0 & \alpha > 0 & \alpha^2 > \beta^2 & \text{falls } \lambda = 0, \\ \delta > 0 & \alpha \geq 0 & \alpha^2 \geq \beta^2 & \text{falls } \lambda < 0 \end{array}$$

genügen.  $K_\lambda$  ist nun eine modifizierte Besselfunktion dritter Art mit Index  $\lambda$  und für  $\lambda = 1$  ergibt sich die hyperbolische Verteilung. Für andere Werte von  $\lambda$  ergeben sich weitere Verteilungen, die ebenfalls im Zusammenhang mit der Modellierung von Aktienrenditen diskutiert werden. So erhält man z. B. für  $\lambda = -\frac{1}{2}$  die Dichte der normalen inversen gaussischen Verteilung (vgl. BARNDORFF-NIELSEN, RYDBERG und CHHIKARA und FOLKS).

## 2.2. Momente

Im Falle der hyperbolischen Verteilung können die Momente der Verteilung nicht wie bei der Normalverteilung als einfache Funktionen der Parameter dargestellt werden. Mit Hilfe des Differentialoperators

$$T_\zeta := -\delta^2 \zeta^{-1} \frac{d}{d\zeta}$$

und mit  $\zeta := \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  und  $a(\zeta) := -\ln \zeta + \ln K_1(\zeta)$  lassen sie sich kompakt darstellen (vgl. KÜCHLER *et al.*):

$$\begin{aligned}
\text{Erwartungswert : } E(x) &= m_1 = \beta T_\zeta a(\zeta) + \mu, \\
\text{Varianz : } \text{var}(x) &= m_2 - (m_1)^2 = \beta^2 T_\zeta^2 a(\zeta) + T_\zeta a(\zeta), \\
\text{Schiefe : } \gamma_1(x) &= \frac{\beta^3 T_\zeta^2 a(\zeta) + 3\beta T_\zeta^2 a(\zeta)}{\left(\beta^2 T_\zeta^2 a(\zeta) + T_\zeta a(\zeta)\right)^{3/2}}, \\
\text{Kurtosis : } \gamma_2(x) &= \frac{\beta^4 T_\zeta^4 a(\zeta) + 6\beta^2 T_\zeta^3 a(\zeta) + 3T_\zeta^2 a(\zeta)}{\left(\beta^2 T_\zeta^2 a(\zeta) + T_\zeta a(\zeta)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um komplizierte Kombinationen von Besselfunktionen. Nutzt man das asymptotische Verhalten der Besselfunktion für grosse und kleine Argumente aus, lassen sich für Schiefe und Kurtosis Näherungen ableiten. Approximativ gilt dann

$$\gamma_1 \sim \begin{cases} \frac{6}{\sqrt{2}} \frac{\beta}{\alpha} \{1 + O((\beta/\alpha)^2)\} & \text{falls } \beta/\alpha \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0 \\ 3\zeta^{-1/2} \frac{\beta}{\alpha} \{1 + O((\beta/\alpha)^2)\} & \text{falls } \beta/\alpha \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty \end{cases}$$

und

$$\gamma_2 \sim \begin{cases} 3\{1 + O((\beta/\alpha)^2)\} & \text{falls } \beta/\alpha \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0 \\ 3\zeta^{-1}\{1 + O((\beta/\alpha)^2)\} & \text{falls } \beta/\alpha \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty \end{cases}$$

(vgl. BARNDORFF-NIELSEN *et al.*). Das asymptotische Verhalten der Kurtosis deutet darauf hin, dass die hyperbolische Verteilung bei einem bestimmten Grenzübergang zur Normalverteilung führt.

Eine Vielzahl von bekannten Verteilungen ergibt sich als Spezialfall aus der hyperbolischen Verteilung. Für die Ableitung dieser Spezialfälle eignet sich die Parametrisierung  $hyp(x; \chi, \xi, \delta, \mu)$ . Die Normalverteilung lässt sich durch den Grenzübergang  $\xi \rightarrow 0$  gewinnen; setzt man  $\xi = 1$ , ergibt sich die Laplace-Verteilung. Beim Limes  $|\chi| \rightarrow 1$  erhält man die Exponentialverteilung. Beim Grenzübergang  $\chi \rightarrow \pm\xi$  schliesslich ergibt sich die sogenannte verallgemeinerte inverse gaussische Verteilung (vgl. BARNDORFF-NIELSEN und BLÆSILD, BARNDORFF-NIELSEN *et al.*, EBERLEIN und KELLER).

### 3. EMPIRISCHE UNTERSUCHUNG

#### 3.1. Datengrundlage

Der Untersuchung liegen alle Tagesschlusskurse von fünf börsenkotierten schweizerischen Aktiengesellschaften der Jahre 1989 bis 1998 zugrunde. Insgesamt handelt es sich pro Aktie um 2492 Datenpunkte. Ebenso wurde der Swiss Market Index (SMI) für die gleiche Periode untersucht. Diese Daten wurden über die Datenbank von DATA-STREAM bezogen. Die Aktienkurse sind korrigiert um Kapitalmassnahmen, d. h. um

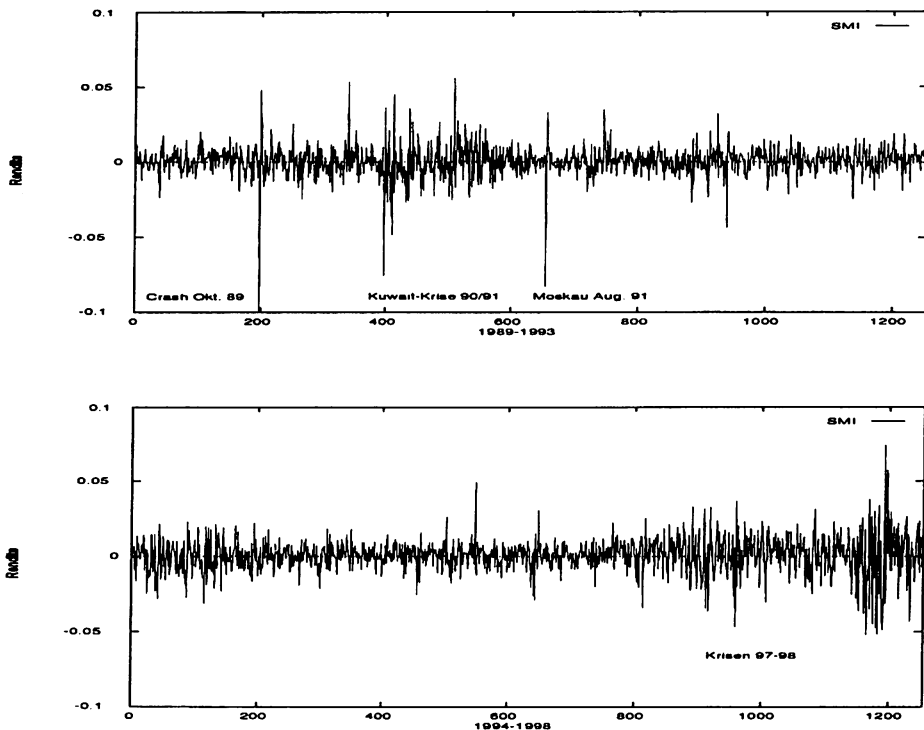
Kapitalerhöhungen, Splits etc., sowie um Dividenden. Auf Basis dieser Kurse wurden tägliche Renditen als Log>Returns

$$R_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (3)$$

berechnet, wobei  $P_t$  den korrigierten Kurs der Aktie zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet. Es wird unterstellt, dass die täglichen Renditen unabhängig voneinander sind. Diese Annahme wird zwar oft kritisiert, in dieser Untersuchung steht aber die Modellierung der breiten Enden empirischer Renditeverteilungen im Vordergrund.

Bei der Auswahl der untersuchten Titel wurde auf eine hohe Marktliquidität geachtet. So soll verhindert werden, dass einzelne Kauf- oder Verkaufsaufträge sich in deutlichen Kursbewegungen niederschlagen. Als Indikator für die Marktliquidität wurden die täglichen Umsätze der einzelnen Titel verwendet. Folgende Titel wurden ausgewählt: ABB Inhaber, Credit-Suisse Namen, Nestlé Namen, Novartis Namen und Roche Genusschein.

Abbildung 1: Tagesrenditen des SMI in den Jahren 1989–1993 und 1994–1998.



Manche Autoren korrigieren die Zeitreihen von Aktienkursen um Ausreisser, z. B. um den Wert am Tag des Putschversuches in Moskau vom August 1991, um auf diese Weise eine höhere Kompatibilität einer theoretischen Verteilung mit den empirischen Daten zu erreichen (vgl. KÜCHLER *et al.*). Die betrachtete theoretische Verteilung soll also nur den „normalen“ Börsenalltag möglichst gut beschreiben. Vor dem Hintergrund der Risikomessung sollte sich eine theoretische Verteilung insbesondere für die Beschreibung extremer Daten eignen. Gerade die extremen Ereignisse sind bei der Risikomessung von Interesse. Eine Korrektur der Daten um Ausreisser wird deshalb nicht vorgenommen.

Abbildung 1 zeigt am Beispiel des SMI die Entwicklung der Renditen in den Jahren 1989 bis 1998. Sehr gut sind einzelne Ereignisse zu erkennen, wie der angesprochene Moskauer Putschversuch im August 1991, der Minicrash im Oktober 1989, die Kuwait-Krise in der zweiten Jahreshälfte 1990 und Anfang 1991. Das seit Herbst 1997 unruhiger gewordene Börsengeschehen lässt sich in einer deutlich erhöhten Volatilität ablesen. Im Gegensatz zu den Jahren 1989 bis 1991, in denen hauptsächlich einzelne starke Kurseinbrüche zu verzeichnen waren, sind nun starke Abweichungen sowohl nach unten als auch nach oben zu beobachten, und zwar über einen längeren Zeitraum. Dieses Verhalten wird allgemein auf die Finanzkrisen in Russland, Südamerika und im asiatischen Raum zurückgeführt.

Bei einer parametrischen Schätzung des Value at Risk müssen zunächst die Parameter der Modellverteilung aus historischen Renditen geschätzt werden. Der Umfang der zugrundegelegten Stichprobe ist dabei sorgfältig abzuwägen. Werden grosse historische Zeiträume berücksichtigt, werden lange zurückliegende Ereignisse einbezogen, die möglicherweise als Szenarien für das kurzfristige zukünftige Verhalten nicht repräsentativ sind. Zu geringe Stichprobenumfänge erschweren die Parameterschätzung und die Folgerung statistisch signifikanter Ergebnisse. Der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht verlangt bei der Anwendung des Value at Risk-Konzepts zur Risikomessung eine Abstützung der Schätzungen auf einen Zeitraum von mindestens einem Jahr (vgl. BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION). Deshalb werden verschiedene Perioden unterschiedlicher Länge untersucht.

### 3.2. Ergebnisse

Die Schätzung des Parametervektors  $\theta := (\alpha, \beta, \mu, \delta)'$  der hyperbolischen Verteilung erfolgt über die Maximierung der Log-Likelihood-Funktion  $\ln L(\theta|x_1, \dots, x_n)$  mit unabhängigen Realisierungen  $x_i (i = 1, \dots, n)$  einer Zufallsvariablen  $X$ , d. h. durch Lösung der Gleichungen

$$\frac{\partial \ln L(\theta|x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichungen können nur auf numerischem Weg gelöst werden. Für die Parameterschätzung wird ein C-Programm verwendet, das auf BLÆSILD und SØRENSEN zurückgeht.

Es soll die Hypothese überprüft werden, ob die Renditen der hyperbolischen Verteilung oder der Normalverteilung genügen. Die Nullhypothese  $H_0$  lautet im einen Fall: die Daten stammen aus einer hyperbolischen Verteilung. Im anderen Fall lautet die Nullhypothese: die Daten stammen aus einer Normalverteilung. Überprüft werden diese Hypothesen mit einem  $\chi^2$ -Anpassungstest. Die Testgrösse  $T$  des  $\chi^2$ -Tests ist unter  $H_0$  asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $k - 1 - g$  Freiheitsgraden, wobei  $g$  die Anzahl der Verteilungsparameter ist, die aus der Stichprobe zu schätzen sind, und  $k$  die Anzahl der Klassen ist, in welche die Daten eingeteilt werden (vgl. HARTUNG, S. 182f.). Die Nullhypothese  $H_0$  ist bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha$  zu verwerfen, falls

$$T > \chi^2_{k-1-g;1-\alpha}. \quad (5)$$

$\chi^2_{k-1-g;1-\alpha}$  bezeichnet dabei das  $(1 - \alpha)100\%$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k - 1 - g$  Freiheitsgraden. Zur graphischen Überprüfung der Normalverteilungshypothese wird zusätzlich einen Quantil-Quantil-Plot verwendet.

Der Gang der Untersuchung und die Ergebnisse werden exemplarisch am Beispiel der Credit-Suisse Namensaktie präsentiert. Die Ergebnisse für die übrigen untersuchten Titel sind im Anhang aufgeführt. Diskussion und Interpretation beziehen sich auf alle untersuchten Aktien und den SMI. Neben dem zehnjährigen Zeitraum wurden zwei fünfjährige, fünf zweijährige und als Vertreter einjähriger Subperioden die Jahre 1997 und 1998 ausgewählt. Über alle Titel gesehen wurden so 60 Perioden unterschiedlicher Länge untersucht. Die  $\chi^2$ -Tests wurden zu den Signifikanzniveaus  $\alpha = 1\%$  und  $\alpha = 5\%$  durchgeführt.

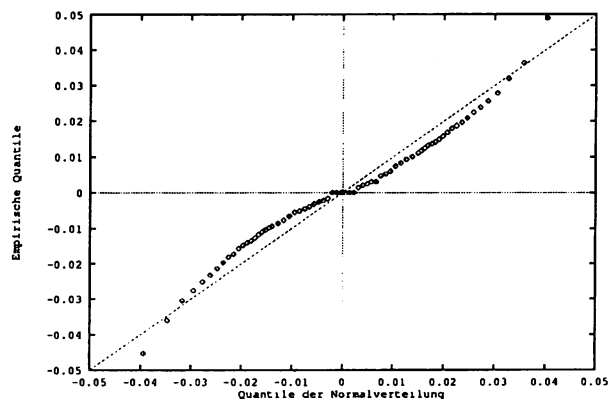
**Tabelle 1: Ergebnisse für die Credit-Suisse Namenaktie**  
( $H_0$  nicht verworfen: (+),  $H_0$  verworfen: (-)).

| CS Namen                      | 1-jährig   |            | 5-jährig   |             | 10-jährig  |
|-------------------------------|------------|------------|------------|-------------|------------|
|                               | 97         | 98         | 89-93      | 94-98       | 89-98      |
| $\hat{\mu}$                   | 0.002138   | - 0.000244 | 0.000589   | 0.000421    | 0.000509   |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000427   | 0.000994   | 0.000187   | 0.000401    | 0.000294   |
| Schiefe                       | - 0.022747 | - 0.360329 | - 0.135403 | - 0.201690  | - 0.200983 |
| Kurtosis                      | 4.584337   | 6.665702   | 8.679897   | 10.554495   | 11.580543  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (-)        | (-)        | (-)        | (-)         | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (-)        | (-)        | (-)        | (-)         | (-)        |
| $\hat{\alpha}$                | 67.418662  | 46.818029  | 107.306919 | 74.871366   | 88.171692  |
| $\hat{\delta}$                | 0.000731   | 3.19e-9    | 9.03e-11   | 2.18e-11    | 2.10e-12   |
| $\hat{\beta}$                 | 3.034365   | -1.972029  | 3.389320   | 1.180431    | 1.977279   |
| $\hat{\mu}$                   | 0.00795    | 0.001559   | -7.63e-11  | - 2.053e-11 | 1.88e-12   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)        | (+)        | (+)         | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (+)        | (+)        | (+)         | (-)        |

| CS Namen                      | 2-jährig   |           |            |            |           |
|-------------------------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|
|                               | 98–90      | 91–92     | 93–94      | 95–96      | 97–98     |
| $\hat{\mu}$                   | -0.000704  | 0.000818  | 0.000834   | 0.000546   | 0.000982  |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000192   | 0.000215  | 0.000201   | 0.000151   | 0.000711  |
| Schiefe                       | -0.496853  | 0.233812  | -2.65384   | 1.753289   | -0.406356 |
| Kurtosis                      | 11.712962  | 6.375204  | 3.772030   | 17.632016  | 7.396454  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (-)        | (-)       | (-)        | (-)        | (-)       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (-)        | (-)       | (-)        | (-)        | (-)       |
| $\hat{\alpha}$                | 112.206093 | 97.669892 | 133.386277 | 147.850557 | 54.992459 |
| $\hat{\delta}$                | 1.33e-11   | 3.74e-11  | 0.014045   | 0.008083   | 8.44e-9   |
| $\hat{\beta}$                 | -4.423536  | 3.894528  | -14.124962 | 19.353681  | -0.812236 |
| $\hat{\mu}$                   | 1.87e-11   | -4.29e-11 | 0.003661   | -0.002035  | 0.001519  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)       | (-)        | (+)        | (+)       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (-)        | (-)       | (-)        | (+)        | (+)       |

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse der Parameterschätzungen sowie die Testergebnisse für alle ausgewählten Perioden der Credit-Suisse Namenaktie. Der jeweils obere Teil dieser Tabelle zeigt die Parameterschätzungen und die Testergebnisse für die Hypothese normalverteilter Renditen. Zusätzlich sind die entsprechenden Schätzungen für Schiefe und Kurtosis angegeben. Im unteren Teil der Tabelle finden sich Schätzungen für die Parameter sowie die Testergebnisse für die Hypothese hyperbolisch verteilter Renditen.

**Abbildung 2: Quantil-Quantil-Plot für die Credit-Suisse Namenaktie für den Zeitraum 1989 bis 1998.**

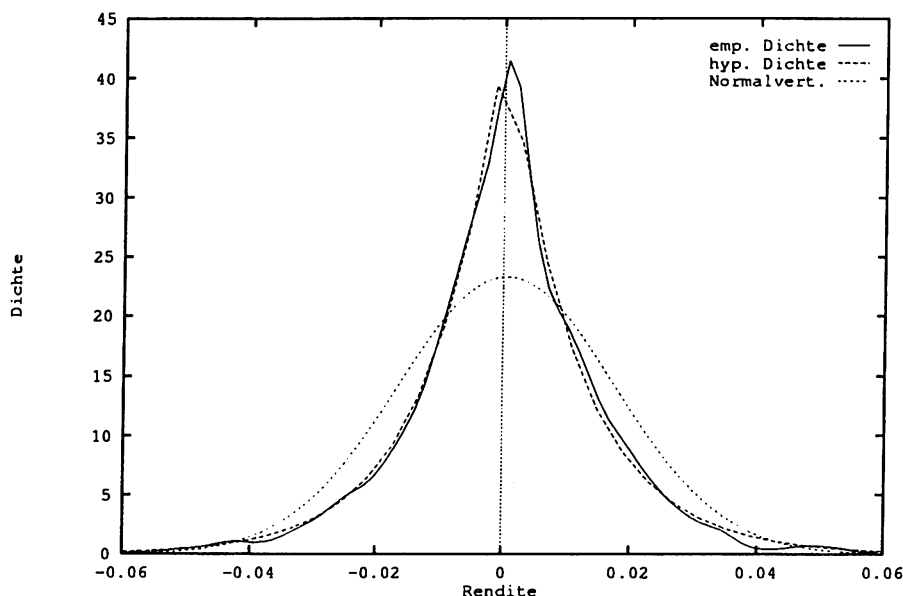




Im vorliegenden Beispiel wurde die Hypothese, dass die Renditen normalverteilt sind, in jedem Fall abgelehnt. Der Quantil-Quantil-Plot in Abbildung 2 für die Periode 1989 bis 1998 zeigt diese Ablehnung in graphischer Weise besonders deutlich. Betrachtet man alle Titel, so wird die Normalverteilungshypothese zum Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  ( $\alpha = 1\%$ ) nur in 20% (25%) der Fälle nicht abgelehnt. In allen anderen Fällen wird die Normalverteilungshypothese verworfen. Bei den Perioden, in denen die Normalverteilung als Hypothese für die Renditen nicht abgelehnt wird, handelt es sich in der Regel um die Jahre 1997 und 1998 sowie um die zweijährigen Perioden 1993–1994 und 1997–1998.

Für die Credit-Suisse Namenaktie wird bis auf den zehnjährigen Zeitraum für beide verwendeten Signifikanzniveaus die Hypothese von hyperbolisch verteilten Renditen nicht abgelehnt. Betrachtet man wiederum alle Titel und alle Perioden, stellt sich dieses Ergebnis bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  ( $\alpha = 1\%$ ) in 68% (77%) der Fälle ein, wobei das numerische Verfahren in insgesamt fünf Fällen keine Parameterschätzungen für die hyperbolische Verteilung liefert.

**Abbildung 3: Vergleich von geschätzter hyperbolischer Dichte, geschätzter Dichte der Normalverteilung und empirischer Dichte der Renditen der Credit-Suisse Namenaktie für den Zeitraum 1989–1998.**



Bis auf die Novartis Namenaktie wird die Hypothese hyperbolisch verteilter Renditen für den zehnjährigen Zeitraum abgelehnt. Trotzdem approximiert die hyperbolische Verteilung auch für diesen Zeitraum die empirische Renditeverteilung besser als die Normalverteilung. Wiederum am Beispiel der Credit-Suisse Namenaktie sei dies demonstriert.

Abbildung 3 zeigt für diesen Titel die geschätzten Dichten der hyperbolischen Verteilung und der Normalverteilung. Verglichen werden diese Dichten mit der empirischen Dichte, welche mit Hilfe eines Kerndichteschätzers geschätzt wird. Die graphische Übereinstimmung der geschätzten hyperbolischen Dichtefunktion mit der empirischen Dichte ist deutlich besser als diejenige der geschätzten Normalverteilung.

Die Schätzungen für die Schiefe zeigen in der Regel negative Werte, was auf linksschiefe Verteilungen schliessen lässt. Die Schätzungen für Kurtosis liefern teilweise deutlich höhere Werte als den Wert Drei, welcher die Normalverteilung charakterisiert. Dies deutet auf leptokurtisches Verhalten hin. Allein auf der Basis einer hohen Kurtosis auf eine „heavy-tailed“ oder „fat-tailed“ Verteilung zu schliessen, stellt aber eine grobe Vereinfachung dar (vgl. BRYSON, DUFFIE und PAN, HULL und WHITE). Eine „fat-tailed“ Verteilung ist zwar auch leptokurtisch, der Umkehrschluss ist aber nicht zwingend.

Die Ergebnisse zeigen, dass sich die hyperbolische Verteilung gut eignet, um Aktienrenditen auf täglicher Basis zu beschreiben. Dies dürfte auch den erhöhten Aufwand rechtfertigen, der mit der Verwendung der hyperbolischen Verteilung verbunden ist.

### 3.3. Implikationen für den Value at Risk

Im vorigen Abschnitt hat sich gezeigt, dass sich Aktienrenditen im allgemeinen durch die hyperbolische Verteilung besser beschreiben lassen als durch die Normalverteilung. Werden nun Risikomasse auf Basis eines parametrischen Modells geschätzt, so sollte die Verwendung der hyperbolischen Verteilung folglich zu deutlich besseren Ergebnissen führen. Dies soll für den Value at Risk, dem derzeitigen Standardmass für Marktrisiken, untersucht werden. Als Beispiel dient der SMI, welcher als gut diversifiziertes Portfolio betrachtet werden kann.

Der Value at Risk stellt den potentiellen Verlust dar, der nach Ablauf einer gewissen Periode nur noch mit einer bestimmten (geringen) Wahrscheinlichkeit  $p$  überschritten wird. Er ist also im wesentlichen das  $(1 - p)100\%$ -Quantil einer Verlustverteilung respektive das  $p100\%$ -Quantil einer Renditeverteilung. Der Value at Risk (VaR) wird definiert als (vgl. JORION, S. 91)

$$\text{VaR} := -W_0 R^*(p) \quad (6)$$

oder in translationsinvarianter Form als

$$\text{VaR} := -W_0 (R^*(p) - E[R]). \quad (7)$$

Das am Anfang der Periode investierte Kapital sei dabei mit  $W_0$  bezeichnet. Die Zufallsvariable  $R$  ist die nach Ablauf eines bestimmten Zeitraums, der als Halteperiode bezeichnet wird, realisierte Rendite. Da Tagesdaten vorliegen, ist dies gerade ein Tag.  $E[R]$  ist der Erwartungswert der Rendite  $R$  und  $R^*(p)$  schliesslich ist das  $p100\%$ -Quantil der Verteilung von  $R$ . Der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht schlägt das 1%-Quantil vor, allerdings bei einer Halteperiode von zehn Handelstagen (vgl. BASLE COMMITTEE ON

BANKING SUPERVISION). J.P. MORGAN verwendet bei einer Halteperiode von einem Tag das 5%-Quantil.

Der Value at Risk ist ein theoretischer Verteilungsparameter, der in der Praxis zu schätzen ist. Kritisch ist dabei die Schätzung des Quantils. Das  $p100\%$ -Quantil stellt für kleine  $p$ -Werte einen Wert im extremen linken Ende einer Renditeverteilung dar, für dessen Schätzung oft nur wenige Daten zur Verfügung stehen.

Bei der parametrischen Schätzung der Quantile auf Grundlage einer Verteilungshypothese werden zunächst die Parameter der entsprechenden Verteilung geschätzt. Sei  $f(x, \hat{\theta})$  die Dichte der angenommenen Verteilung mit geschätzten Parametervektor  $\hat{\theta}$ . Dann muss zur Bestimmung des  $p100\%$ -Quantils  $R^*(p)$  die Gleichung

$$F(R^*) = \int_{-\infty}^{R^*(p)} f(R, \hat{\theta}) dR = p \quad (8)$$

respektive  $F(R^*) - p = 0$  gelöst werden. Dies ist nichts anderes als die Bestimmung der Nullstelle einer Funktion, was etwa mit der Intervallhalbierungsmethode (vgl. PRESS *et al.*, S. 343ff.) gelöst werden kann. Bei diesem iterativen Verfahren werden jeweils die Werte der Verteilungsfunktion  $F$  mit Hilfe einer numerischen Integration berechnet. Wird speziell eine Normalverteilung für die Renditen unterstellt, ergibt sich als Schätzung für das  $p100\%$ -Quantil

$$\hat{R}^*(p) = z^*(p)\hat{\sigma} + \hat{\mu}, \quad (9)$$

wobei  $z^*(p)$  das  $p100\%$ -Quantil der Standardnormalverteilung und  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\sigma}$  die geschätzten Parameter der Normalverteilung sind (vgl. RIDDER, HARTUNG, S. 147).

Da die Höhe des Modellrisikos letztlich unbekannt bleibt, existiert auch kein Mass, mit dem sich dieses Risiko quantifizieren liesse. Um beurteilen zu können, ob die Normalverteilung oder die hyperbolische Verteilung genauere Value at Risk-Schätzungen liefert, ist man daher auf indirekte Kriterien angewiesen.

Zunächst legen die Ergebnisse von Abschnitt 3.2 eine Reduktion des Modellrisikos bei Verwendung der hyperbolischen Verteilung gegenüber der Normalverteilung nahe. Die Tatsache, dass die Hypothese hyperbolisch verteilter Renditen durch den  $\chi^2$ -Test wesentlich häufiger nicht abgelehnt wird als die Hypothese normalverteilter Renditen, ist dafür ein deutlicher Hinweis.

Desweiteren lassen sich Value at Risk-Schätzungen ex-post mit tatsächlich eingetretenen Kursänderungen vergleichen. Dieses Verfahren wird als Backtesting bezeichnet. Im folgenden werden für einen längeren Zeitraum tägliche Value at Risk-Werte mit einer Halteperiode von einem Tag geschätzt. Als Zeitraum wurden die Jahre 1992 bis 1998 ausgewählt. Die Schätzung der Verteilungsparameter erfolgt über ein Fenster von 500 Tageskursen (ca. zwei Jahre). Startet man mit dem ersten Handelstag des Jahres 1992, dem 3.1.92, so erhält man eine erste Value at Risk-Schätzung für den 22.12.93. Wird das Fenster über den gesamten Beobachtungszeitraum geschoben, gewinnt man Schätzwerte

(ungefähr) für den Zeitraum 1994 bis 1998. Die Verteilungsparameter werden dabei ebenso wie die Value at Risk-Werte täglich neu geschätzt. Für die Zeitperiode 1992 bis 1998 stehen für den SMI 1759 Tageskurse zur Verfügung. Aufgrund der Fensterbreite und der Halteperiode von einem Tag können 1258 Value at Risk-Schätzungen mit den tatsächlich eintretenden Kursänderungen verglichen werden.

Ein exaktes Modell sollte im Durchschnitt zu genau  $p\%$  Überschreitungen des Value at Risk führen. Die Zufallsvariable, die beschreibt, ob eine Kursänderung eine Überschreitung des Value at Risk darstellt oder nicht, ist binomialverteilt. Unter der Nullhypothese, dass der Schätzwert für den Value at Risk auf Grundlage eines exakten Modells bestimmt wurde, ist die Wahrscheinlichkeit für eine Überschreitung des Value at Risk gerade  $p\%$ . Für die Alternativhypothese kann diese Wahrscheinlichkeit aus der Stichprobe als relative Häufigkeit der Anzahl beobachteter Überschreitungen  $x$  und dem Stichprobenumfang  $n$  geschätzt werden. Die Modellgüte kann dann mit einem Likelihood-Ratio-Test überprüft werden, wobei der Likelihood-Ratio (LR) durch

$$\lambda = \frac{(1-p)^{n-x} p^x}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-x} \left(\frac{x}{n}\right)^x} \quad (10)$$

gegeben ist (vgl. KUPIEC). Die Grösse  $-2 \ln \lambda$  ist unter  $H_0$  asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit einem Freiheitsgrad. Nach Festlegung eines Signifikanzniveaus  $\alpha$  kann der Ablehnungsbereich bestimmt werden.

Die Höhe einer potentiellen Überschreitung des Value at Risk bleibt beim Value at Risk als Risikomass unberücksichtigt. Jedoch kann zusätzliche Information über Überschreitungshöhen aus dem Backtesting gewonnen werden. Eintretene Überschreitungshöhen des Value at Risk werden dazu mit den im jeweiligen Modell zu erwartenden Überschreitungshöhen verglichen. Die tatsächliche Überschreitungshöhe wird berechnet als Differenz zwischen der Value at Risk-Schätzung und der Kursänderung, falls eine Überschreitung aufgetreten ist. Die erwartete Überschreitungshöhe ergibt sich als Differenz zwischen geschätztem Value at Risk-Wert und dem bedingten Erwartungswert, gegeben eine Überschreitung des Value at Risk tritt auf. Der bedingte Erwartungswert wird dabei im jeweiligen Modell über eine numerische Integration berechnet. Verglichen werden dann die arithmetischen Mittel der tatsächlichen und der erwarteten Überschreitungshöhen für die im Untersuchungszeitraum aufgetretenen Überschreitungen.

Tabelle 2 präsentiert die Ergebnisse der Value at Risk-Schätzungen und des Backtesting für verschiedene  $p100\%$ -Quantile. Dem Value at Risk liegt Definition (6) zugrunde, wobei  $W_0$  gleich Eins gesetzt wurde. In Tabelle 2 sind nicht nur die Ergebnisse für den gesamten Beobachtungszeitraum, sondern auch für drei Subperioden aufgezeichnet. Erfasst sind für beide Modelle jeweils die Anzahl Überschreitungen in Prozent der Anzahl Beobachtungen und die Ergebnisse der Likelihood-Ratio-Tests für die Signifikanzniveaus  $\alpha = 1\%$  und  $\alpha = 5\%$ . Zusätzlich sind die mittleren tatsächlichen und die mittleren erwarteten Überschreitungshöhen erfasst.

**Tabelle 2: Ergebnisse des Backtesting für die parametrischen VaR-Schätzungen auf Basis der Normalverteilung (NV) und der hyperbolischen Verteilung (HV) des SMI vom 22.12.93 bis 30.12.98 ( $H_0$  nicht verworfen: (+),  $H_0$  verworfen: (-)).**

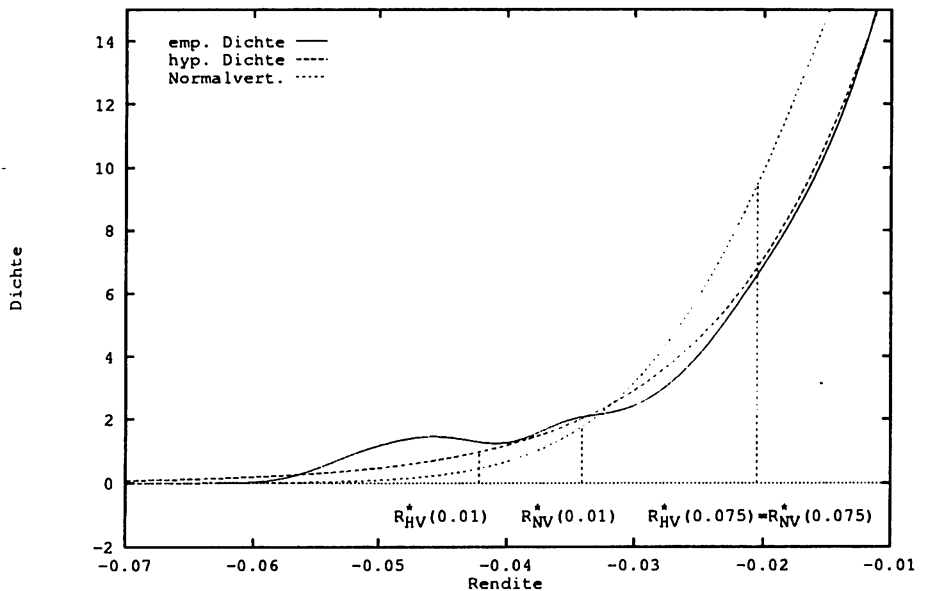
| Swiss Market Index<br>(SMI)        | $p = 1.0\%$ |        | $p = 2.5\%$ |        | $p = 5.0\%$ |        | $p = 7.5\%$ |        |
|------------------------------------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|--------|
|                                    | NV          | HV     | NV          | HV     | NV          | HV     | NV          | HV     |
| 22.12.93 – 13.12.95 ( $n = 500$ )  |             |        |             |        |             |        |             |        |
| Anzahl Überschreitungen in %       | 1.8         | 1.2    | 3.2         | 2.2    | 6.0         | 5.2    | 8.4         | 7.8    |
| mittlere tats. Übersch.höhe        | 0.0060      | 0.0037 | 0.0058      | 0.0056 | 0.0052      | 0.0052 | 0.0052      | 0.0051 |
| mittlere erw. Übersch.höhe         | 0.0029      | 0.0051 | 0.0033      | 0.0052 | 0.0036      | 0.0054 | 0.0039      | 0.0055 |
| LR-Test $\alpha = 1\%$             | (+)         | (+)    | (+)         | (+)    | (+)         | (+)    | (+)         | (+)    |
| LR-Test $\alpha = 5\%$             | (+)         | (+)    | (+)         | (+)    | (+)         | (+)    | (+)         | (+)    |
| 14.12.95 – 15.12.97 ( $n = 500$ )  |             |        |             |        |             |        |             |        |
| Anzahl Überschreitungen in %       | 3.6         | 2.4    | 5.4         | 4.2    | 7.4         | 7.2    | 8.4         | 8.4    |
| mittlere tats. Übersch.höhe        | 0.0077      | 0.0068 | 0.0077      | 0.0078 | 0.0080      | 0.0077 | 0.0087      | 0.0087 |
| mittlere erw. Übersch.höhe         | 0.0028      | 0.0052 | 0.0031      | 0.0052 | 0.0034      | 0.0053 | 0.0037      | 0.0053 |
| LR-Test $\alpha = 1\%$             | (-)         | (-)    | (-)         | (+)    | (+)         | (+)    | (+)         | (+)    |
| LR-Test $\alpha = 5\%$             | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (+)         | (+)    |
| 16.12.97 – 30.12.98 ( $n = 258$ )  |             |        |             |        |             |        |             |        |
| Anzahl Überschreitungen in %       | 6.6         | 5.4    | 9.7         | 7.4    | 11.6        | 11.2   | 13.2        | 13.2   |
| mittlere tats. Übersch.höhe        | 0.0120      | 0.0074 | 0.0171      | 0.0121 | 0.0132      | 0.0127 | 0.0140      | 0.0141 |
| mittlere erw. Übersch.höhe         | 0.0040      | 0.0082 | 0.0044      | 0.0082 | 0.0049      | 0.0083 | 0.0053      | 0.0083 |
| LR-Test $\alpha = 1\%$             | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    |
| LR-Test $\alpha = 5\%$             | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    |
| 22.12.93 – 30.12.98 ( $n = 1258$ ) |             |        |             |        |             |        |             |        |
| Anzahl Überschreitungen in %       | 3.5         | 2.5    | 5.4         | 4.1    | 7.7         | 7.2    | 9.4         | 9.1    |
| mittlere tats. Übersch.höhe        | 0.0090      | 0.0066 | 0.0087      | 0.0089 | 0.0087      | 0.0087 | 0.0090      | 0.0091 |
| mittlere erw. Übersch.höhe         | 0.0031      | 0.0058 | 0.0035      | 0.0058 | 0.0038      | 0.0060 | 0.0041      | 0.0060 |
| LR-Test $\alpha = 1\%$             | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (+)         | (+)    |
| LR-Test $\alpha = 5\%$             | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    | (-)         | (-)    |

Zunächst ist festzuhalten, dass beim hyperbolischen Modell nie mehr Überschreitungen auftreten als bei der Normalverteilung, in der Regel ist die Anzahl dieser Überschreitungen deutlich geringer. Der LR-Test eignet sich allerdings nicht, um zwischen den beiden Modellen zu differenzieren. Wird die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt, so geschieht dies bei den angegebenen  $p$ -Werten simultan für beide Modelle. Eine Nichtablehnung der Nullhypothese erfolgt darüber hinaus praktisch nur für die ersten 500 Beobachtungen. Mit steigendem  $p$  wird die Nullhypothese allerdings auch für die anderen Subperioden weniger häufig abgelehnt. Ebenfalls untersucht wurden kleine  $p$ -Werte von

0.1%, 0.25% und 0.5%. Bei diesen  $p$ -Werten tritt erst für  $p = 0.1\%$  und den Gesamtbeobachtungszeitraum der Fall ein, dass der LR-Test die hyperbolische Verteilung als exaktes Modell nicht verwirft und gleichzeitig die Normalverteilung als exaktes Modell verwirft. Bei derart kleinen  $p$ -Werten treten dann aber in einzelnen Teilperioden für beide Verteilungen keine Überschreitungen auf, so dass der LR-Test nicht angewendet werden kann. Dieser Umstand tritt auch schon für  $p$ -Werte zwischen 1% und 0.1% auf.

Weiterhin ist festzuhalten, dass sich die Überschreitungshäufigkeiten mit wachsendem  $p$  angleichen, da die Schätzwerte für das jeweilige Quantil immer mehr übereinstimmen.

**Abbildung 4: Vergleich der empirischen Dichte, der geschätzten Dichten von Normalverteilung und hyperbolischer Verteilung des SMI für den Zeitraum 1997 bis 1998.**



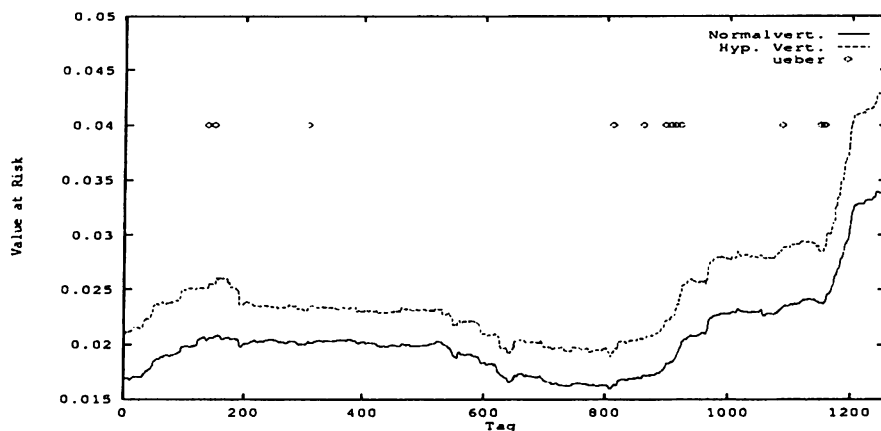
Dieses Verhalten wird in Abbildung 4 illustriert. Sie zeigt für den SMI im Beobachtungszeitraum 1997 bis 1998 die geschätzte empirische Dichte und die geschätzten Dichtefunktionen der Normalverteilung und der hyperbolischen Verteilung im relevanten Bereich. Zusätzlich sind die Schätzwerte für das 1%- und das 7.5%-Quantil eingetragen. Für den betrachteten Zeitraum wird die Hypothese hyperbolisch verteilter Renditen im Gegensatz zur Hypothese normalverteilter Renditen nicht abgelehnt (vgl. Anhang A.5). Aus der Abbildung ist die gute Approximationseigenschaft der hyperbolischen an die empirische Dichte zu erkennen. Die 1%-Quantile von hyperbolischer Verteilung und Normalverteilung unterscheiden sich daher auch deutlich. Da die Dichtefunktion der Normalverteilung zunächst unterhalb der empirischen Dichte liegt, muss ein grösserer Wert für das Quantil gewählt werden, um für die Wahrscheinlichkeit  $p = 1\%$  genug

Wahrscheinlichkeitsmasse „aufsammlen“ zu können. Im weiteren Verlauf liegt die Dichte der Normalverteilung über der hyperbolischen Dichte, was dazu führt, dass die geschätzten 7.5%-Quantile nahezu übereinstimmen. Trotz deutlich unterschiedlichem Verlauf der Dichtefunktionen, können bei bestimmten  $p$ 100%-Quantilen die Value at Risk-Schätzungen zusammenfallen.

Unterschiedliche Verläufe der Dichtefunktionen verschiedener Modelle machen sich allerdings bei der Berechnung der erwarteten Überschreitungshöhen bemerkbar. Vergleicht man die arithmetischen Mittel der tatsächlichen und der in beiden Modellen erwarteten Überschreitungshöhen für verschiedene  $p$ -Werte, so treten deutliche Unterschiede auf. In allen Fällen weicht, absolut und relativ betrachtet, die mittlere erwartete Überschreitungshöhe für die hyperbolische Verteilung sehr viel weniger von der mittleren tatsächlichen Überschreitungshöhe ab als im Fall der Normalverteilung. Für den Gesamtzeitraum beträgt die relative Abweichung bezüglich der tatsächlichen Überschreitungshöhe für die hyperbolische Verteilung zwischen circa 13% und 35% für verschiedene  $p$ -Werte, für die Normalverteilung zwischen 54% und 66%.

In Abbildung 5 schliesslich ist der zeitliche Verlauf der parametrischen Value at Risk-Schätzungen für  $p = 1\%$  dargestellt. Die Absicherung durch die Value at Risk-Werte ist im hyperbolischen Fall höher als im Fall der Normalverteilung. Zusätzlich sind durch die Punkte diejenigen Zeitpunkte gekennzeichnet, bei denen bei der Normalverteilung eine Überschreitung auftrat, beim hyperbolischen Modell jedoch nicht. Diese Zeitpunkte liegen in der Regel in Phasen ansteigender Value at Risk-Schätzungen, z. B. im Verlauf der Jahre 1997 und 1998 aufgrund steigender Volatilität.

**Abbildung 5: Zeitlicher Verlauf der parametrischen Value at Risk-Schätzungen des SMI vom 22.12.93 bis 30.12.93 auf der Basis der Normalverteilung und der hyperbolischen Verteilung.**



Zusammengefasst lässt sich bemerken, dass die geringeren Überschreitungshäufigkeiten in Verbindung mit den geringeren Abweichungen der mittleren erwarteten von den mitt-

leren tatsächlichen Überschreitungshöhen auf eine Reduktion des Modellrisikos bei Verwendung der hyperbolischen Verteilung gegenüber der Normalverteilung hindeuten.

#### 4. SCHLUSSBEMERKUNG

Zunächst wurde in dieser Arbeit die hyperbolische Verteilung als Modell für Aktienrenditen vorgestellt. Ihre Eigenschaften wurden diskutiert und die Methode zur Parameterschätzung erwähnt. In einem zweiten Teil wurde die hyperbolische Verteilung für ausgewählte Titel des schweizerischen Aktienmarktes getestet. Diese Studie hat ergeben, dass sich diese Verteilung zur Modellierung empirischer Renditeverteilungen besser eignet als die Normalverteilung. Selbst in den Fällen, in denen die Hypothese hyperbolisch verteilter Renditen abgelehnt wird, lassen sich die empirischen Dichten durch diese Verteilung besser beschreiben. Bei der Untersuchung der Konsequenzen, die sich aus der Verwendung des hyperbolischen Modells für die Schätzung des Value at Risk ergeben, zeigte sich, dass dadurch das Modellrisiko gegenüber der Normalverteilung vermindert werden kann.

#### ANHANG: DIE ERGEBNISSE IM ÜBERBLICK

##### A.1. ABB Inhaber: Parameterschätzungen

| ABB Inhaber                   | 1-jährig  |           | 5-jährig   |           | 10-jährig |
|-------------------------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|
|                               | 97        | 98        | 89-93      | 94-98     | 89-98     |
| $\hat{\mu}$                   | 0.000620  | -0.000529 | 0.000608   | 0.000383  | 0.000506  |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000305  | 0.000614  | 0.000225   | 0.000249  | 0.000238  |
| Schiefe                       | -1.474911 | -0.391111 | -0.353785  | -0.786482 | -0.587532 |
| Kurtosis                      | 11.149393 | 6.888112  | 8.222717   | 12.213275 | 10.442429 |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (-)       | (-)       | (-)        | (-)       | (-)       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (-)       | (-)       | (-)        | (-)       | (-)       |
| $\hat{\alpha}$                | n. a.     | n. a.     | 101.254883 | 96.787031 | 98.876826 |
| $\hat{\delta}$                | n. a.     | n. a.     | 0.003478   | 0.001796  | 0.002872  |
| $\hat{\beta}$                 | n. a.     | n. a.     | 2.732345   | -7.722534 | -2.772913 |
| $\hat{\mu}$                   | n. a.     | n. a.     | 0.000030   | 0.002091  | 0.001109  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ |           |           | (+)        | (+)       | (-)       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ |           |           | (+)        | (+)       | (-)       |



| ABB Inhaber                   | 2-jährig  |            |            |            |           |
|-------------------------------|-----------|------------|------------|------------|-----------|
|                               | 89–90     | 91–92      | 93–94      | 95–96      | 97–98     |
| $\hat{\mu}$                   | 0.000730  | –0.000075  | 0.000979   | 0.000846   | 0.000065  |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000298  | 0.000213   | 0.000134   | 0.000086   | 0.000459  |
| Schiefe                       | –0.312733 | –0.435596  | 0.070094   | –0.326911  | –0.728726 |
| Kurtosis                      | 8.107511  | 6.839448   | 3.486414   | 4.252071   | 8.609178  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (–)       | (–)        | (+)        | (–)        | (–)       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (–)       | (–)        | (+)        | (–)        | (–)       |
| $\hat{\alpha}$                | 85.801915 | 106.422687 | 211.493521 | 215.658648 | 68.569495 |
| $\hat{\delta}$                | 4.083–11  | 0.005153   | 0.020443   | 0.010070   | 0.000228  |
| $\hat{\beta}$                 | 2.684204  | –1.046365  | 20.805155  | –33.691438 | –5.747719 |
| $\hat{\mu}$                   | 4.90e–11  | 0.000139   | –0.001780  | 0.003644   | 0.002529  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)       | (+)        | (+)        | (+)        | (+)       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)       | (+)        | (+)        | (+)        | (+)       |

## A.2. Nestlé Namen: Parameterschätzungen

| Nestlé Namen                  | 1-jährig   |            | 5-jährig   |            | 10-jährig |
|-------------------------------|------------|------------|------------|------------|-----------|
|                               | 97         | 98         | 89–93      | 94–98      | 89–98     |
| $\hat{\mu}$                   | 00.001789  | 0.001193   | 0.000607   | 0.000745   | 0.000678  |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000155   | 0.000380   | 0.000118   | 0.000164   | 0.000141  |
| Schiefe                       | –0.086636  | –0.407469  | –0.816198  | –0.258011  | –0.470657 |
| Kurtosis                      | 4.120717   | 3.757916   | 13.770437  | 5.642890   | 8.630182  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)        | (–)        | (–)        | (–)       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (+)        | (–)        | (–)        | (–)       |
| $\hat{\alpha}$                | 164.156098 | 109.503886 | 134.985117 | 123.410957 | n. a.     |
| $\hat{\delta}$                | 0.015347   | 0.023474   | 2.113–11   | 0.005790   | n. a.     |
| $\hat{\beta}$                 | –.576932   | –21.766382 | 5.519311   | 1.467076   | n. a.     |
| $\hat{\mu}$                   | 0.002337   | 0.008994   | 2.30e–11   | 0.000509   | n. a.     |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)        | (–)        | (+)        |           |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (+)        | (–)        | (–)        |           |

| Nestlé Namen     | 2-jährig  |           |           |           |           |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                  | 89–90     | 91–92     | 93–94     | 95–96     | 97–98     |
| $\hat{\mu}$      | 0.000142  | 0.001134  | 0.000242  | 0.000419  | 0.001533  |
| $\hat{\sigma}^2$ | 0.000157  | 0.000079  | 0.000133  | 0.000068  | 0.000268  |
| Schiefe          | –1.166177 | –0.098811 | –0.058707 | –0.177606 | –0.389290 |

| Nestlé Namen                  | 2-jährig   |            |            |            |            |
|-------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                               | 89-90      | 91-92      | 93-94      | 95-96      | 97-98      |
| Kurtosis                      | 15.303194  | 11.856542  | 3.697147   | 5.001036   | 4.500428   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (-)        | (-)        | (+)        | (+)        | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (-)        | (-)        | (+)        | (+)        | (-)        |
| $\hat{\alpha}$                | 123.454603 | 179.531096 | 240.882081 | 219.960842 | 110.021232 |
| $\hat{\delta}$                | 1.23e-10   | 0.002746   | 0.025280   | 0.007275   | 0.013288   |
| $\hat{\beta}$                 | 1.085191   | 19.001919  | 6.907636   | -0.461783  | -11.583924 |
| $\hat{\mu}$                   | -2.88e-11  | -0.000221  | -0.000668  | 0.000450   | 0.004545   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        |

### A.3. Novartis Namen: Parameterschätzungen

| Novartis Namen                | 1-jährig  |            | 5-jährig  |            | 10-jährig  |
|-------------------------------|-----------|------------|-----------|------------|------------|
|                               | 97        | 98         | 89-93     | 94-98      | 89-98      |
| $\hat{\mu}$                   | 0.002039  | 0.000500   | 0.00729   | 0.000994   | 0.000863   |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000285  | 0.000349   | 0.000237  | 0.000228   | 0.000233   |
| Schiefe                       | -0.043644 | 0.005604   | -1.321936 | 1.259220   | -0.068256  |
| Kurtosis                      | 4.078810  | 4.826793   | 24.295154 | 19.759430  | 22.181096  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)       | (+)        | (-)       | (-)        | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)       | (-)        | (-)       | (-)        | (-)        |
| $\hat{\alpha}$                | n. a.     | 100.346085 | 97.594541 | 106.532131 | 103.277572 |
| $\hat{\delta}$                | n. a.     | 0.017242   | 6.73e-11  | 0.005845   | 0.004112   |
| $\hat{\beta}$                 | n. a.     | -11.058928 | 3.467180  | -0.902861  | -0.416199  |
| $\hat{\mu}$                   | n. a.     | 0.004238   | -5.78e-11 | 0.001183   | 0.000950   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ |           | (+)        | (-)       | (+)        | (+)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ |           | (+)        | (-)       | (+)        | (+)        |

| Novartis Namen                | 2-jährig  |           |           |           |           |
|-------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|                               | 89-90     | 91-92     | 93-94     | 95-96     | 97-98     |
| $\hat{\mu}$                   | -0.000087 | 0.001214  | 0.000244  | 0.001629  | 0.001299  |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000319  | 0.000208  | 0.000148  | 0.000173  | 0.000317  |
| Schiefe                       | -1.838836 | -0.384167 | -0.152836 | 4.805584  | -0.032250 |
| Kurtosis                      | 28.463202 | 11.089715 | 3.948755  | 68.346210 | 4.570538  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (-)       | (-)       | (+)       | (-)       | (+)       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (-)       | (-)       | (-)       | (-)       | (+)       |

| Novartis Namen                | 2-jährig  |            |            |            |       |
|-------------------------------|-----------|------------|------------|------------|-------|
|                               | 89-90     | 91-92      | 93-94      | 95-96      | 97-98 |
| $\hat{\alpha}$                | 88.246430 | 101.045150 | 152.556977 | 135.319509 | n. a. |
| $\hat{\delta}$                | 5.90e-10  | 2.05e-11   | 0.011654   | 0.003293   | n. a. |
| $\hat{\beta}$                 | -0.341329 | 6.177009   | -12.239243 | 8.868669   | n. a. |
| $\hat{\mu}$                   | 5.03e-10  | 2.27e-11   | 0.002049   | 0.000541   | n. a. |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)       | (+)        | (+)        | (+)        |       |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)       | (+)        | (+)        | (+)        |       |

## A.4. Roche GS: Parameterschätzungen

| Roche GS                      | 1-jährig   |            | 5-jährig   |            | 10-jährig  |
|-------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                               | 97         | 98         | 89-93      | 94-98      | 89-98      |
| $\hat{\mu}$                   | 0.001303   | 0.000561   | 0.001325   | 0.000810   | 0.001086   |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000241   | 0.000251   | 0.000171   | 0.000166   | 0.000169   |
| Schiefe                       | 0.056055   | -0.072057  | -1.041412  | -0.151905  | -0.607247  |
| Kurtosis                      | 4.309097   | 3.133058   | 13.035266  | 4.732844   | 8.998945   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)        | (-)        | (-)        | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (+)        | (-)        | (-)        | (-)        |
| $\hat{\alpha}$                | 152.197345 | 255.069761 | 114.347518 | 132.636963 | 119.716383 |
| $\hat{\delta}$                | 0.025693   | 0.057177   | 4.19e-12   | 0.009127   | 0.004430   |
| $\hat{\beta}$                 | -8.691619  | -20.226760 | 8.616394   | -9.606200  | -4.310918  |
| $\hat{\mu}$                   | 0.003367   | 0.005586   | -7.32e-13  | 0.002394   | 0.001762   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)        | (-)        | (+)        | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (+)        | (-)        | (+)        | (-)        |

| Roche GS                      | 2-jährig  |            |            |            |            |
|-------------------------------|-----------|------------|------------|------------|------------|
|                               | 89-90     | 91-92      | 93-94      | 95-96      | 97-98      |
| $\hat{\mu}$                   | 0.000840  | 0.001644   | 0.000834   | 0.001053   | 0.000982   |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000235  | 0.000149   | 0.000145   | 0.000072   | 0.000246   |
| Schiefe                       | -1.175478 | -0.698650  | -0.528843  | -0.230279  | -0.015521  |
| Kurtosis                      | 11.790082 | 12.949142  | 4.871507   | 4.846335   | 3.704146   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (-)       | (-)        | (-)        | (+)        | (+)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (-)       | (-)        | (-)        | (+)        | (+)        |
| $\hat{\alpha}$                | 97.602743 | 122.451089 | 128.265918 | 215.889129 | 170.061494 |
| $\hat{\delta}$                | 2.49e-10  | 3.37e-11   | 0.004972   | 0.007504   | 0.032299   |
| $\hat{\beta}$                 | 4.002366  | 12.204579  | -8.699459  | -21.148542 | -8.427376  |

| Roche GS                      | 2-jährig |          |          |          |          |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                               | 89-90    | 91-92    | 93-94    | 95-96    | 97-98    |
| $\hat{\mu}$                   | 2.80e-10 | 1.83e-11 | 0.002102 | 0.002547 | 0.003020 |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)      | (-)      | (+)      | (+)      | (+)      |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)      | (-)      | (-)      | (+)      | (+)      |

#### A.5. SMI: Parameterschätzungen

| SMI                           | 1-jährig   |            | 5-jährig   |            | 10-jährig  |
|-------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                               | 97         | 98         | 89-93      | 94-98      | 89-98      |
| $\hat{\mu}$                   | 0.001872   | 0.000451   | 0.000560   | 0.000696   | 0.000633   |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000154   | 0.000304   | 0.000108   | 0.000134   | 0.000121   |
| Schiefe                       | -0.481878  | -0.218181  | -1.438211  | -0.255429  | -0.751422  |
| Kurtosis                      | 4.166645   | 4.847729   | 21.325534  | 6.905310   | 12.707527  |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (-)        | (-)        | (-)        | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (-)        | (-)        | (-)        | (-)        |
| $\hat{\alpha}$                | 157.463259 | 101.866072 | 164.186660 | 136.684468 | 147.587797 |
| $\hat{\delta}$                | 0.011124   | 0.011802   | 0.004048   | 0.004376   | 0.003963   |
| $\hat{\beta}$                 | -35.849655 | -17.810864 | -10.070848 | -11.918593 | -10.710101 |
| $\hat{\mu}$                   | 0.006979   | 0.005523   | 0.001464   | 0.002210   | 0.001792   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (+)        | (-)        | (+)        | (-)        |

| SMI                           | 2-jährig   |            |            |            |            |
|-------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
|                               | 89-90      | 91-92      | 93-94      | 95-96      | 97-98      |
| $\hat{\mu}$                   | -0.000117  | 0.000858   | 0.000427   | 0.000828   | 0.001197   |
| $\hat{\sigma}^2$              | 0.000145   | 0.000097   | 0.000080   | 0.000055   | 0.000230   |
| Schiefe                       | -1.712059  | -0.854481  | -0.304072  | 0.210838   | -0.346708  |
| Kurtosis                      | 21.792646  | 16.125369  | 3.378509   | 7.893820   | 5.208026   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (-)        | (-)        | (+)        | (-)        | (-)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (-)        | (-)        | (+)        | (-)        | (-)        |
| $\hat{\alpha}$                | 140.799701 | 172.924410 | 340.078188 | 237.386686 | 117.000831 |
| $\hat{\delta}$                | 0.003505   | 0.004473   | 0.020285   | 0.005075   | 0.009692   |
| $\hat{\beta}$                 | -4.905548  | -1.728433  | -87.483387 | -22.189443 | -22.523766 |
| $\hat{\mu}$                   | 0.000446   | 0.001002   | 0.006888   | 0.001971   | 0.005982   |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 1\%$ | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        |
| $\chi^2$ -Test $\alpha = 5\%$ | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        | (+)        |

## LITERATUR

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A.: Handbook of mathematical functions. New York: Dover Publications 1970.
- BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Overview of the amendment to the capital accord to incorporate market risks. Basle 1996.
- BARNDORFF-NIELSEN, O., BLÆSILD, P.: Hyperbolic Distribution. In Kotz, S., Johnson, N.L. (Hrsg.): Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 7, 700–707, New York: John Wiley & Sons 1983.
- BARNDORFF-NIELSEN, O., BLÆSILD, P., JENSEN, J.L., SØRENSEN, M.: The Fascination of Sand. In Atkinson, A.C., Fienberg, S.E. (Hrsg.): A Celebration of Statistics, 57–87, New York: Springer 1985.
- BARNDORFF-NIELSEN, O.: Normal inverse Gaussian process and the modelling of stock returns. Research Report No. 300, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus 1995.
- BLACK, F., SCHOLES, M.: The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81, 281–299 (1973).
- BLÆSILD, P., SØRENSEN, M.: „hyp“ – a computer program analyzing data by means of the hyperbolic distribution. Research Report No. 248, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus 1992.
- BRACHINGER, H.W.: Das Parameterrisiko von Risikomanagement-Systemen. Der Schweizer Treuhänder, 10, 1015–1022 (1998).
- BRYSON, M.C.: Heavy-tailed distributions. In Kotz, S., Johnson, N.L. (Hrsg.): Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 3, 598–601, New York: John Wiley & Sons 1983.
- CHHIKARA, R.S., FOLKS, J.L.: The Inverse Gaussian Distribution. New York: Decker 1989.
- DUFFIE, D., PAN, J.: An Overview of Value at Risk, Journal of Derivatives, 4, 7–49 (1997).
- EBERLEIN, E., KELLER, U.: Hyperbolic Distributions in Finance, Bernoulli, 1, 281–299 (1994).
- EBERLEIN, E., KELLER, U., PRAUSE, K.: New insights into smile, mispricing and value at risk: the hyperbolic model. FDM-Preprint-Reihe Nr. 39, Universität Freiburg i. Br. 1997.
- HARTUNG, J.: Statistik. München: Oldenbourg 1995.
- HULL, J., WHITE, A.: Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed. Journal of Derivatives, 5, 9–19 (1998).
- JORION, P.: Value at Risk. The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk. Chicago: Irwin 1997.
- KÜCHLER, U., NEUMANN, K., SØRENSEN, M., STRELLER, A.: Stock Returns and Hyperbolic Distributions. Discussion Paper 23, SFB 373, Humboldt-Universität Berlin 1994.

- KUPIEC, P.H.: Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *The Journal of Derivatives*, 2, 73–84 (1995).
- MORGAN J. P.: *Risk Metrics – Technical Document, Fourth Edition*. New York: J.P. Morgan 1996.
- PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P.: *Numerical Recipes in FORTRAN – The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press 1992.
- RIDDER, T.: Basics of Statistical VaR-Estimation. Working Paper, SGZ-Bank AG 1997.
- RYDBERG, T.H.: Generalized Hyperbolic Diffusions with Applications towards finance. Research Report No. 342, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus 1996.
- RYDBERG, T.H.: The Normal Gaussian Lévy Process: Simulation and Approximation. Research Report No. 344, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus 1996.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit zeigt anhand empirischer Daten, dass Renditeverteilungen von Titeln des schweizerischen Aktienmarktes mit gutem Erfolg durch eine hyperbolische Verteilung beschrieben werden können. Im Vergleich mit der Normalverteilung kann auf diese Weise eine deutlich bessere Modellierung erzielt werden. Ebenso wird dargestellt, dass die Verwendung der hyperbolischen Verteilung bei der Messung von Marktrisiken mit dem Value at Risk-Konzept zu einer Reduktion des Modellrisikos führt.

#### SUMMARY

This article shows on an empirical data basis that return distributions of stocks of the swiss stock market can be successfully described through the hyperbolic distribution. Comparing this distribution with the normal distribution one can achieve a more accurate modelling. In addition it is shown, that the use of a hyperbolic distribution for the measurement of market risk with the Value at Risk concept will lead to a reduction in model risk.

#### RESUME

Cet article montre sur la base de données empiriques que les distributions des rendements de valeurs du marché actionnaire suisse peuvent être décrites avec succès par la distribution hyperbolique. Comparée à la distribution normale, cette distribution permet d'ob-

tenir un modèle plus précis. L'utilisation de la distribution hyperbolique dans le cadre d'une quantification des risques de march, par l'approche du Value at Risk permet en plus de réduire le risque lié au modèle.